Cours du jeudi ~~2~~ 1er février 202~~3~~4

Géométrie

Soit K un corps (par exemple $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier), $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

Définitions.

Un *espace affine* est un triplet $(\mathscr{E}, E, +)$ où $\mathscr{E}$ est un ensemble, E un $K-$espace vectoriel, $+ : \mathscr{E} \times E \to \mathscr{E}$, $(x, u) \mapsto x + u$ une action *simplement transitive* du groupe $(E, +)$ sur l'ensemble $\mathscr{E}$ †.

Notation. On pose ${}^\forall x, y \in \mathscr{E}$, $\overrightarrow{xy} \in E$ tel que $x + \overrightarrow{xy} = y$.

Remarques. 1) ${}^\forall x, y, z \in \mathscr{E}$, dans l'espace vectoriel E, $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ et $-\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{yx}$.

2) définition équivalente : un espace affine est un couple $(\mathcal{E}, E)$ où $\mathcal{E}$ est un ensemble, E un K-espace vectoriel tels qu'il existe une application $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E$, $A, B \mapsto \overrightarrow{AB}$ qui vérifie : 1) $\forall A, B, C$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 2) $\forall A \in \mathcal{E}$, $\forall \vec{u} \in E$, $\exists!\, B \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Exemples.

a) $\mathscr{E} = \mathbb{R}^n$, $E = \mathbb{R}^n$, avec l'addition usuelle de $\mathbb{R}^n$.

b) $\mathscr{E} = \{*\}$ un singleton, $E = 0$ et $+$ la seule application possible $\{*\} \times 0 \to \{*\}$.

c) $\mathscr{E} = \emptyset$ et E un espace vectoriel quelconque.

d) Une intersection d'espace affines est encore un espace affine.

e) Une droite est un sous-espace affine de dimension 1. Si $A \neq B \in \mathscr{E}$, $K-$espace affine, on note $(AB) = A + K\overrightarrow{AB}$ la droite *engendrée* par A, B.

Si $(\mathscr{E}, E, +)$ est un $K-$espace affine non vide la *dimension* de $\mathscr{E}$ est $\dim_K E$.

Soit $(\mathscr{E}, E, +)$ un $K-$espace affine. On dit que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{E}$ est un *sous$-K-$espace affine* si $\mathscr{F} = \emptyset$ ou $\mathscr{F} = x + F$ pour un certain $x \in \mathscr{F}$, $F \leq E$ (sous$-K-$espace vectoriel.) La *direction* de $\mathscr{F}$ est le sous-espace vectoriel F, noté $\overrightarrow{\mathscr{F}}$.

Exemple. La droite d'équation $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x + y + 1 = 0\} = (1, 0) + \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x + y = 0\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$.

Soient $(\mathscr{E}, E, +)$, $(\mathscr{F}, F, +)$ deux espaces affines. Une *application affine* est une fonction $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ telle que :

$$ {}^\exists \vec{f} \in \mathscr{L}(E, F),\ {}^\forall x, y \in \mathscr{E},\ \overrightarrow{f(x)f(y)} = \vec{f}(\overrightarrow{xy}) \ . $$

L'application linéaire $\vec{f}$ est la *partie linéaire* de f.

Exemples.

a) Les fonctions constantes.

†. *c-à-d* ${}^\forall x, y \in \mathscr{E}, {}^\forall u, v \in E$, $x + 0 = x$, $(x + u) + v = x + (u + v)$, ${}^\forall x, y \in \mathscr{E}$, ${}^\exists! u \in E$, $x + u = y$

b) Les translations $t_{\vec{u}} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, $x \mapsto x + \vec{u}$, si $\vec{u} \in E$ fixé. ‡

c) L'homothétie de centre $O \in \mathscr{E}$ est de rapport $t \in K$: $h_{O,t} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, $x \mapsto O + t\overrightarrow{Ox}$. §

Exercice.

1) Si f, g sont des applications affines alors $f \circ g$ aussi et $\overrightarrow{f \circ g} = \vec{f} \circ \vec{g}$ (*pour peu qu'on puisse composer*).

2) $^\forall O, O' \in \mathscr{E}$, $^\forall t, t' \in \mathbb{R}$, $h_{O,t} \circ h_{O,t'}$ est une homothétie ou une translation.

Soit $(\mathscr{E}, E, +)$ un espace affine. On dit que les n points $A_1, ..., A_n \in \mathscr{E}$ sont affinement indépendants si les $n-1$ vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, ..., \overrightarrow{A_1A_n} \in E$ sont linéairement indépendants. †

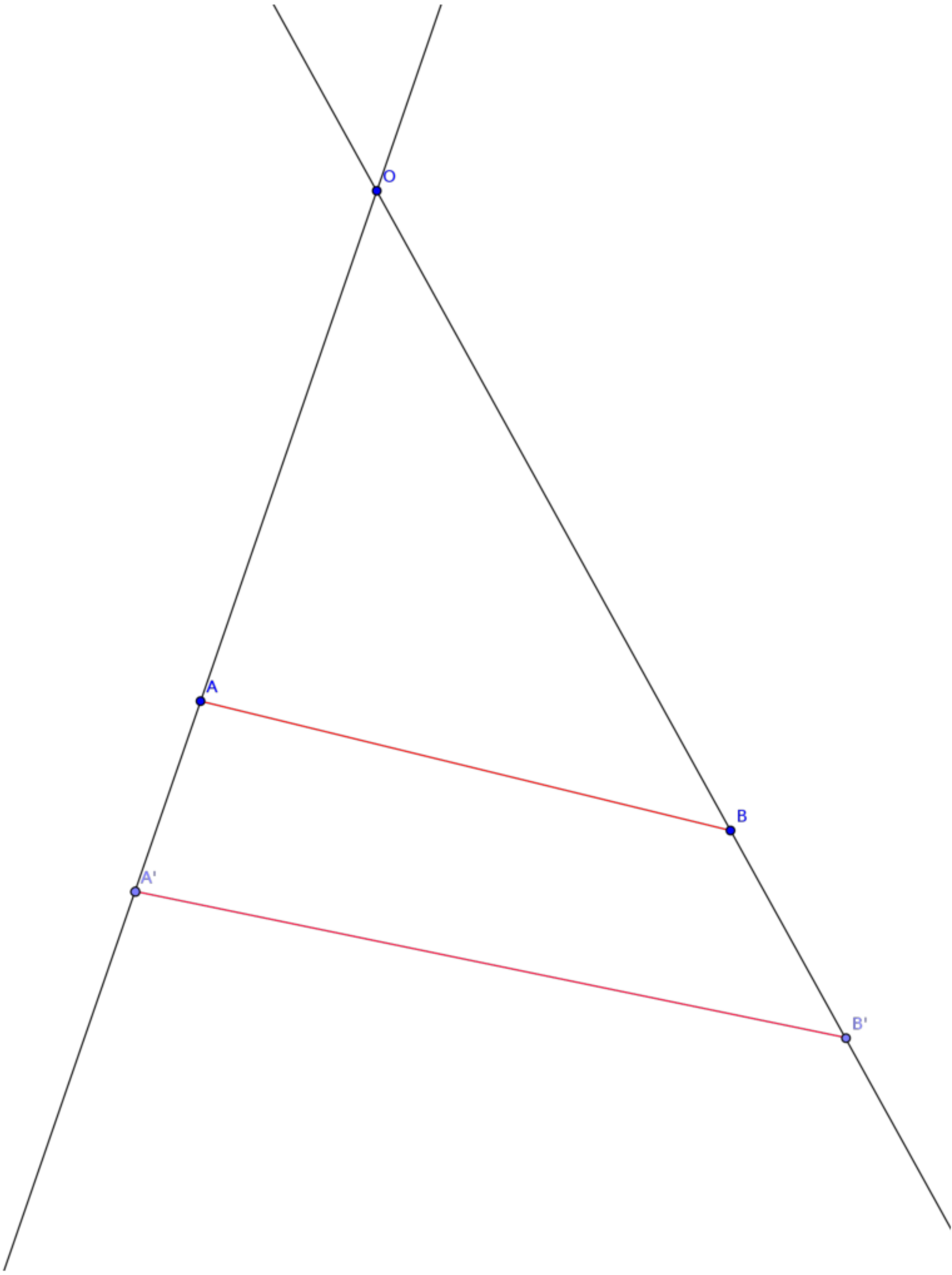
Théorèmes.

Théorème de Thalès.

‡. c'est l'identité si $\vec{u} = 0$, c'est sans point fixe si $\vec{u} \neq 0$.

§. $\overrightarrow{h_{O,t}} = t\mathrm{Id}_E$. Si $t \neq 1$, $h_{O,t}$ a un seul point fixe $(= O)$, et $h_{O,1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$.

†. $(^\forall 1 \leq i \leq n) \Leftrightarrow$ les $n-1$ vecteurs $\overrightarrow{A_iA_j}$, $1 \leq j \neq i \leq n$ sont linéairement indépendants.



Soient O, A, B trois points affinement indépendants d'un $K-$espace affine. On suppose que $A' \in (OA)$ et $B' \in (OB)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}}$;

(ii) il existe une homothétie h de centre O telle que $h(A) = A'$ et $h(B) =$

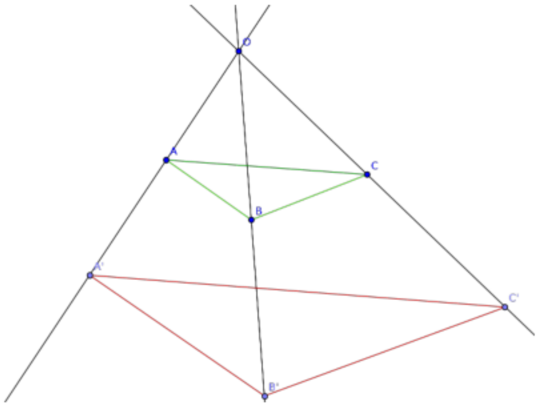
B' ;

(iii) $(AB)//(A'B')$ [†].

Démo. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $t = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}}$, soit $h = h_{O,t}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $h((AB)) = (A'B')$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soient $x = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$, $y = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}}$. Alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = y\overrightarrow{OB} - x\overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OA}$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$. Comme O, A, B sont affinement indépendants, $y = x = t$.



Théorème de Desargues. Soient A, B, C, A', B', C' deux triangles dans un plan affine. On suppose que les côtés sont parallèles deux à deux : $(AB)//(A'B')$, $(AC)//(A'C')$, $(BC)//(B'C')$. Alors les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes ou parallèles.

Démo. **Dans le cas où $(AA'), (BB')$ s'intersectent en un point O.**

D'après le théorème de Thalès, il existe une homothétie h de centre O telle que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$.

Comme h est une homothétie, $h((AC))$ = une droite passant par $A' = h(A)$ et parrallèle à (AC). Donc $h((AC)) = (A'C')$. De même $h((BC)) = h((B'C'))$.

Or $C \in (AC) \cap (BC) \Rightarrow h(C) \in (A'C') \cap (B'C') \Rightarrow h(C) = C'$.

Donc O, C, C' sont alignés et les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes en O.

Analyse complexe

Rayon de convergence.

Définition. Le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ est $R = \sup\{r \geq 0 \ : \ (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \} \in [0, +\infty]$.

Formules. $R = \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

†. *c-à-d* $\overrightarrow{A'B'} \in K\overrightarrow{AB}$.

Analyse Complexe

Rayon de convergence

définition. Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

est $R = \sup\{r \geq 0, (|a_n| r^n) \text{ bornée}\}$

$\in [0, +\infty]$

Formule. $R = \dfrac{1}{\limsup_n |a_n|^{1/n}}$

remarque. si $\lim_n \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ converge vers l

alors $R = \dfrac{1}{l}$

par ex : $\sum_n \dfrac{x^n}{n!}$ a pour rayon $+\infty$

Propriétés. $\forall |z| < R$, $\sum_{n\infty} |a_n z|^n$ converge

$\forall |z| > R$ $\sum_n a_n z^n$ diverge grossièrement

Produit de Cauchy

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ séries

de rayons de convergence R, R'.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ où

$\forall n \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

a un rayon de convergence $\geq \min\{R, R'\}$

et $\forall |z| < \min\{R, R'\}$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

démo.

si (a_n) converge vers a

si (b_n) converge vers b

alors $\dfrac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} \cdot \cdot \cdot + a_n b_0}{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} ab$

Application : $\boxed{\text{si } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge}}$

si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge où $c_n = a_0 b_n + \dots + a_n b_0$ $(\forall n)$

alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

De plus si $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ converge et $\sum_{n\geq 0} |b_n|$ converge alors $\sum c_n$ converge.

démo. Soit $A_n = a_0 + \cdots + a_n \xrightarrow[n\infty]{} A$

$B_n = b_0 + \cdots + b_n \xrightarrow[n\infty]{} B$

$C_n = c_0 + \cdots + c_n$

$$\forall n, \quad C_n = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + \cdots + a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$$

$$= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0$$

$$\frac{C_0 + C_1 + \cdots + C_n}{n+1} = \frac{A_0 B_n + \cdots + A_n B_0}{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} AB$$

(convergence au sens de Césaro).

Inverse. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon $R > 0$

si $a_0 \neq 0$, on pose (par récurrence)

$b_0 = a_0^{-1}$, $b_n = -a_0^{-1}(a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)$ $(\forall n \geq 1)$

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ a un rayon $R_1 > 0$ et

$\forall |z| < \min\{R, R_1\}$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}$.

Exc. a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ a un rayon $\underline{1}$

et $\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} z^n} = 1 - z$ a un rayon ∞

b) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$ a un rayon ∞.

$\dfrac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ a pour rayon $\dfrac{\pi}{2}$.

Dérivations Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ série de rayon $R > 0$

alors $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$ a le même rayon $R > 0$

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$\forall |z_0| < R$, et $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \dfrac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n$

Application. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a un rayon $R > 0$

alors $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ définit une fonction C^{∞}

sur $]-R, R[$ et $\forall n \geq 0$, $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$

Quelques séries à connaître

a) $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad R = \infty$$

b) $$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad R = \infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R = \infty$$

c) $$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

où $$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad R = 1$$

(si $\alpha \notin \mathbb{N}$)

d) $$-\ln(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

Remarques

a) $$\tan z = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$$

Comme $\tan' = 1 + \tan^2$

$$\forall n \quad (2n+1)\, t_{2n+1} = t_{2n-1} t_1 + t_{2n-3} t_3 + \cdots + t_1 t_{2n-1}$$

(en particulier $\forall n, \ t_{2n+1} > 0$)

b) $\displaystyle \frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

$$\left(\frac{1}{\cos}\right)' = \tan \cdot \frac{1}{\cos}$$

$\Rightarrow \forall n, \quad 2n\, c_{2n} = c_{2n-2}\, t_1 + \dots + c_0\, t_{2n-1}$

(en particulier $\forall n$, $c_{2n} > 0$)

Remarque : Interprétation combinatoire des coefficients c_{2n} et t_{2n+1} :

si $a_n = \left| \left\{ (\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)) : \begin{array}{l} \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ et} \\ \sigma(1)<\sigma(2)>\sigma(3)\cdots \end{array} \right\} \right|$

alors $\displaystyle c_{2n} = \frac{a_{2n}}{(2n)!}$

$$t_{2n+1} = \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ex : $\displaystyle c_4 = \frac{5}{24}$ $\quad a_4 = |\{(1324),(1423),(2314),(2413),(3412)\}| = 5$

$\displaystyle t_3 = \frac{2}{6}$, $a_3 = |\{(132),(231)\}| = 2$

Fonctions holomorphes

Définition. Soit $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ où U ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe en $z_0 \in U$ si $\displaystyle\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$.

On dit que f holomorphe sur U si $\forall z_0 \in U$, f holomorphe en z_0.

<u>contre-exemple</u>. $z \mapsto \overline{z}$ n'est pas holomorphe.

car $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ 0 \neq x \in \mathbb{R}}} \frac{\overline{z_0+x} - \overline{z_0}}{x} = 1$$

$$\neq \lim_{\substack{y \to 0 \\ 0 \neq y \in \mathbb{R}}} \frac{\overline{z_0+iy} - \overline{z_0}}{iy} = -1$$

Exemples 1) les polynômes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon $R > 0$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$

Critère de Cauchy-Riemann

Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

On pose $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$

où $P(x,y)$, $Q(x,y) \in \mathbb{R}$.

Théorème. f holomorphe en $x_0+iy_0 \in U$

$\Longleftrightarrow$ P, Q différentiables en (x_0,y_0) et

$$\begin{cases} \partial_x P(x_0,y_0) = \partial_y Q(x_0,y_0) \\ \partial_y P(x_0,y_0) = -\partial_x Q(x_0,y_0) \end{cases}$$

ex : pour $z \mapsto \bar{z}$, $P(x,y) = x$, $Q(x,y) = -y$

$$\partial_x P = 1 \neq \partial_y Q = -1$$

Exemple Détermination principale du logarithme.

Remarque. $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z = \rho e^{i\theta} = e^{\ln\rho + i\theta}$

où $\rho > 0$, $-\pi \leq \theta < \pi$

On pose $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto \ln\rho + i\theta = \begin{cases} \ln|z| + i\arccos\frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} & \text{si } \mathrm{Im}\, z \geq 0 \\ \ln|z| - i\arccos\frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} & \text{si } \mathrm{Im}\, z \leq 0 \end{cases}$$

Alors $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe

et $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $e^{\mathrm{Log}\, z} = z$

$\forall r > 0$, $\forall -\pi < t < \pi$, $\mathrm{Log}(re^{it}) = \ln r + it$

et $\forall |z| < 1$, $-\mathrm{Log}(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$.

Calcul différentiel

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fonction

où U = ouvert. Soit $a \in U$

Définition. On dit que f est différentiable en a s'il existe $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire tq :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|)$$

(pour une norme quelconque $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$)

Notation : ℓ ne dépend que de f et a et est notée $\ell = df_a$

remarques 1°/ si $n = m = 1$, différentiable = dérivable et $df_a(h) = f'(a)h \quad (\forall h \in \mathbb{R})$

2°) si f est linéaire, $df_a = f$

(car $f(a+h) = f(a) + f(h)$)

(rappel. $o(\|h\|) = \left\{ \|h\| g(h) : \lim_{\substack{\|h\| \to 0 \\ h \neq 0}} g(h) = 0 \right\}$.

Exemples.

a) $F : M \longmapsto M^2$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

F est différentiable car

$\forall M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F(M+H) = (M+H)^2$

$$= M^2 + \underbrace{MH + HM}_{\text{linéaire en } H} + \underbrace{H^2}_{o(\|H\|)}$$

si $\|\cdot\|$ est multiplicative alors

$\|H^2\| \leq \|H\|^2$ donc $(M+H)^2 = M^2 + MH + HM + o(\|H\|)$

b) $GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \quad M \longmapsto M^{-1}$

Soit $\mathrm{Inv}(M) = M^{-1}$.

Calculons $d\,\mathrm{Inv}_M$

$$(M+H)^{-1} = \left(M\left(I_n + M^{-1}H\right)\right)^{-1}$$

$$= \left(I_n + M^{-1}H\right)^{-1} M^{-1}$$

or $\left(I_n + M^{-1}H\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-M^{-1}H\right)^k$

donc $(M+H)^{-1} = M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + \underbrace{\sum_{k \geq 2} \left(-M^{-1}H\right)^k M^{-1}}_{r(H)}$

$$\|r(H)\| \leq \sum_{k \geq 2} \|M^{-1}\|^{k+1} \|H\|^k$$

$$\leq \|H\|^2 \underbrace{\sum_{k \geq 0} \|M^{-1}\|^{k+3} \|H\|^k}_{\frac{\|M^{-1}\|^3}{1 - \|M^{-1}\| \|H\|}} = o(\|H\|)$$

donc $d\,\mathrm{Inv}_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}$.

c) $\exp : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & e^M \end{array}$

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

exp est différentiable

$$e^{M+H} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M+H)^k}{k!}$$

$$\text{Or } (M+H)^k = M^k + \overbrace{M^{k-1}H + M^{k-2}HM + \dots + HM^{k-1}}^{\ell_k(H)}$$

$$+ \sum \text{« monômes (non commutatifs) en } M, H \text{ de degré } k \text{ avec au moins 2 fois la lettre } H \text{ »}.$$

$\forall k \geq 1$,
$$\ell_k(H) = \sum_{i=1}^{k-1} M^{k-1-i} H M^i$$

$$\left\| \frac{(M+H)^k}{k!} - \frac{M^k}{k!} - \frac{\ell_k(H)}{k!} \right\| \leq \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} \frac{\|M\|^{k-i} \|H\|^i}{k!}$$

$$\left\| e^{M+H} - e^M - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell_k(H)}{k!} \right\| \leq \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} \|M\|^{k-i} \|H\|^i}$$

$$\sum_{\alpha \geq 0, \beta \geq 2} \frac{\|M\|^\alpha}{\alpha!} \frac{\|H\|^\beta}{\beta!}$$

$$= O(\|H\|^2)$$

$$\boxed{d\exp_M(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell_k(H)}{k!}}$$

où $\forall k$, $\ell_k(H) = M^{k-1}H + M^{k-2}HM + \dots + HM^{k-1}$

remarque. si on note $ad_X : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $H \longmapsto XH - HX$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell_k(H)}{k!} = e^X \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ad_X)^k(H)}{(k+1)!}$$

(cette formule s'obtient en réordonnant les termes de la somme de gauche...)

Définition si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$, si $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$

on dit que f est dérivable $\underbrace{}_{\text{en } a \in U}$ dans la direction de v

si $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$ existe dans $\mathbb{R}^m$.

Notation : $\partial_v f(a) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$

si $(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$, on note $\partial_i f(a) = \partial_{e_i} f(a) = \partial_{x_i} f(a)$

Remarque. Si f différentiable en a, alors

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \frac{df_a(tv)+o(\|tv\|)}{t}$$

$$= df_a(v) + \frac{o(t)}{t}$$

$$= df_a(v) + o(1) \longrightarrow df_a(v)$$

donc $\partial_v f(a) = df_a(v)$.

Contre-exemple. Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$\forall\, v \neq 0$, $\partial_v f(0,0)$ existe

mais $df_{(0,0)}$ n'existe pas. (à modifier)

En effet : si $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$.

$$\frac{f(ta,tb)}{t} = \frac{t^3(v_1^3+v_2^3)}{t\cdot t^2(v_1^2+v_2^2)} \xrightarrow[t\neq 0]{t\to 0} \frac{v_1^3+v_2^3}{v_1^2+v_2^2}$$

Donc $\forall\, 0 \neq v = (v_1, v_2)$, $\partial_v f(0,0) = \dfrac{v_1^3 + v_2^3}{v_1^2 + v_2^2}$

Ce n'est pas linéaire en v donc $df_{(0,0)}$ n'existe pas !