Anneaux & corps

0) Définitions

Soit $(A, +, \cdot)$ où A ensemble

et $+, \cdot : A \times A \to A$

$(a,b) \longmapsto a+b$

$(a,b) \longmapsto a \cdot b$

on dit que $(A, +, \cdot)$ est un anneau si

anneau

anneau commutatif

i) $(A,+)$ est un groupe de neutre $0 \in A$

ii) associativité : $\forall a,b,c \in A$, $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

iii) $\exists\, 0 \neq 1 \in A$, $\forall a \in A$, $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$

iv) distributivité :

$\forall a,b,c \in A$, $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

$(a+b)\cdot c = ac + bc$

v) commutativité $\forall a,b \in A$, $a\cdot b = b\cdot a$

Remarques. a) i, ii, iii, iv $\Longrightarrow$ $(A,+)$ groupe abélien

En effet : $\forall a,b \in A$, $(1+1)(a+b) = \cancel{a}+b+a+\cancel{b} = \cancel{a}+a+b+\cancel{b}$
$\Longrightarrow b+a = a+b$

b) $\forall a \in A$, $0 \cdot a = 0$

ex. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),+,\cdot)$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\cdot)$

où $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{x} : x \in \mathbb{Z}\}$ avec $\overline{x} = x + n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x+y}, \quad \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$$

(opérations bien définies.

Par ex. si $\overline{x} = \overline{x_1}$ et $\overline{y} = \overline{y_1}$ alors

$$x - x_1 \in n\mathbb{Z}, \quad y - y_1 \in n\mathbb{Z}$$

donc $x \cdot y - x_1 y_1 = \underbrace{(x - x_1) y}_{\in n\mathbb{Z}} + \underbrace{x_1 (y - y_1)}_{\in n\mathbb{Z}}$

$\in n\mathbb{Z} \Rightarrow \overline{x \cdot y} = \overline{x_1 y_1}$)

On dit que, si $(A,+,\cdot)$ anneau et $B \subset A$

avec $0, 1 \in B$, $\forall x,y \in B$, $x+y \in B$, $xy \in B$,

B est un sous-anneau de A.

remarque. Dans ce cas $(B,+,\cdot)$ est un anneau

Exemples.

a) $\mathbb{D} = \{\text{décimaux}\} = \left\{ \frac{a}{10^k} : a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \right\}$

sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

b) $\mathbb{Z}[i] = \{ a + ib : a, b \in \mathbb{Z} \}$

sous-anneau de $\mathbb{C}$

c) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{ a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z} \}$

d) $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{3} + \mathbb{Q}\sqrt{6}$ sous-anneau de $\mathbb{R}$

(en effet : stable par produit par $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$)

$(\sqrt{2}\sqrt{6} = 2\sqrt{3})$

2) Inversibles

Soit $(A, +, \cdot)$ anneau commutatif

On dit que $a \in A$ est inversible

si $\exists b \in A,\ a \cdot b = 1$. Remarque : si un tel b existe, il est unique et noté a^{-1}.

Notation $A^* = \{\text{inversibles de } A\}$

remarque $A^* \subset A \setminus \{0\}$ (si $ab = 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$)

exemples. a) $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$

b) $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

c) $\mathbb{D}^* = \{\pm 2^\alpha 5^\beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$

[En effet si $\frac{a}{10^k} \in \mathbb{D}^*$ alors $\frac{10^k}{a} \in \mathbb{D}$

$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} / \frac{10^k}{a} \times 10^l \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a \mid 10^{k+l}$

$\Rightarrow$ a de la forme $\pm 2^r 5^s$ ...]

d) $\mathbb{Z}[i]^* = \{\pm 1, \pm i\}$

En effet : $N : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N}$

$a+ib \longmapsto |a+ib|^2 = a^2+b^2$

est multiplicative, $N(1) = 1$

donc $(a+ib)(c+id) = 1 \Rightarrow (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 1$

$\Rightarrow a^2+b^2 = 1 \Rightarrow a = 0$ et $b = \pm 1$

ou $a = \pm 1$ et $b = 0$

$\Rightarrow \mathbb{Z}[i]^* \subset \{\pm 1, \pm i\}$.

5. e)

$$j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}$$

$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}j = \mathbb{Z}[j]$ sous-anneau de $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{Z}[j]^* = \{\pm 1, \pm(1+j), \pm j\}$$

f) $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2} = A$ sous-anneau de $\mathbb{R}$

$$A^* = \{\pm(\pm 1 \pm \sqrt{2})^n ; n \in \mathbb{Z}\}$$

En effet, $(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) = 1 \implies \pm 1 \pm \sqrt{2} \in A^*$

de l'inclusion réciproque.

démo ✓

Soit $x \in A^*$, alors $\pm x, \pm x^{-1} \in A^*$.

L'application $A \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$a + b\sqrt{2} \longmapsto (a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$$

est multiplicative. Donc $a + b\sqrt{2} \in A \iff a^2 - 2b^2 = \pm 1$

Or $(a+b\sqrt{2})^{-1} = \dfrac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = \pm(a-b\sqrt{2})$

On en déduit que si $x = a + b\sqrt{2} \in A^*$, alors

$$\{\pm x, \pm x^{-1}\} = \{\pm a \pm b\sqrt{2}\}$$

En particulier, $\max\{\pm x, \pm x^{-1}\} = |a| + |b|\sqrt{2}$.

Supposons que $x = a + b\sqrt{2} \in A^*$ avec $a, b \geq 0$.

Alors $x \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ ... tel que $(1+\sqrt{2})^n \leq x < (1+\sqrt{2})^{n+1}$

Un tel n existe car $\lim\limits_{n \infty} (1+\sqrt{2})^n = +\infty$.

Soit $y = \dfrac{x}{(1+\sqrt{2})^n} = \alpha + \beta\sqrt{2} \in A^*$ avec

$$1 \leq y < \sqrt{2}.$$

On a forcément $y = \max\{\pm y, \pm y^{-1}\}$ donc $\alpha, \beta \geq 0$

Comme $y < 1+\sqrt{2}$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$

Comme $\sqrt{2} \notin A^*$ (car $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin A$).

donc $\alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = (1+\sqrt{2})^n$.

g) $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^* = \{\pm \bar{1}, \pm \bar{5}\}$ (exo)

3) Anneaux intègres

Définition. $(A, +, \cdot)$ anneau

On dit que A est intègre si

$$\forall a, b \in A, \quad ab = 0 \Rightarrow a \text{ ou } b = 0$$

[c-à-d : $\forall a \neq 0, \forall b \neq 0, \ ab \neq 0$]

ex. 1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{D}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ p premier intègres

2) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ n'est pas intègre car $\bar{2} \neq 0$, $\bar{6} \neq 0$

et $\bar{2} \cdot \bar{6} = \overline{12} = \bar{0}$.

Définition. Un corps est un anneau $(K, +, \cdot)$

tq $K^* = K \setminus \{0\}$

Remarque. Un sous-anneau d'un corps est intègre

[si $x, y \in K$, $x \neq 0$,

$$\Rightarrow x \cdot y = 0 \Rightarrow x^{-1} x y = y = 0]$$

Ex. 1) $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps, $\mathbb{Q}$ corps,

2) $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}=\{a+b\sqrt{2} : a,b\in\mathbb{Q}\}$ sous-corps de $\mathbb{R}$.

$$\left[\text{si } a+b\sqrt{2}\neq 0,\ \frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}\in\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}\right]$$

$$\left(a^2-2b^2\neq 0 \iff \left(\frac{a}{b}\right)^2\neq 2 \iff \frac{a}{b}\neq\pm\sqrt{2}\right)$$

3)
$$\left\{\begin{pmatrix} a & 2b & 3c & 6d \\ b & a & 3d & 3c \\ c & 2d & a & 2b \\ d & c & b & a\end{pmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{Q}\right\}\subset\mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$$

est un corps.

Indication Soit $K=\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}+\mathbb{Q}\sqrt{3}+\mathbb{Q}\sqrt{6}$

On pose pour tout $x\in K$, m_x la matrice de la multiplicat. par x dans la base $(1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$ de K vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Si $x=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$, alors $m_x=\begin{pmatrix} a & 2b & 3c & 6d \\ b & a & 3d & 3c \\ c & 2d & a & 2b \\ d & c & b & a\end{pmatrix}$, ...

4) Anneaux de polynômes

Soit A anneau. On définit un anneau noté $A[X]$

i) comme ensemble, $A[X]=A^{(\mathbb{N})}=\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \exists d,\ \forall n\geq d,\ a_n=0\}$

ii) addition : $(a_n)_n+(b_n)_n=(a_n+b_n)_n\in A^{(\mathbb{N})}$

iii) produit : $(a_n)_n\cdot(b_n)_n=(c_n)_n\in A^{(\mathbb{N})}$

où $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{\substack{k,l \geq 0 \\ k+l=n}} a_k b_l = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$= \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} b_l$

si $n \geq d \Rightarrow a_n = 0$

et $n \geq e \Rightarrow b_n = 0$

alors $n \geq d+e-1 \Rightarrow c_n = 0$

Proposition $(A[X], +, \cdot)$ anneau

Notation. $X = (0, 1, 0, 0, \dots)$

(suite $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq 1 \\ 1 \text{ si } n = 1 \end{cases}$)

Exo. $(a_n)_n = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$

remarque si on prend $A^{\mathbb{N}}$ au lieu de $A^{(\mathbb{N})}$

avec les mêmes opérations on obtient un anneau

noté $A[[X]]$ « séries formelles »

Définition. si $0 \neq P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in A[X]$,

on note $\deg P = \max\{n \geq 0 : a_n \neq 0\}$

$\deg 0 = -\infty$.

<u>Remarque</u>. $\forall P, Q \in A[X]$, $P \neq 0$, $Q \neq 0$, $\deg P.Q = \deg P + \deg Q$

<u>Si A intègre</u>

Corollaire. A intègre $\Rightarrow$ $A[X]$ aussi.

Analyse fonctionnelle

1) Espaces L^p

Soit (X, μ) espace mesuré

Définitions.

soit $1 \leq p < \infty$ réel

$$\mathcal{L}^p(X,\mu) = \left\{ f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ mesurable} : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) = \{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ mesurable} : \sup_{ess} |f| < \infty \}$$

où $\sup_{ess} |f| = \inf \{ A \geq 0 : |f| \leq A \ \ \mu\text{-p.p.} \}$

soient $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ où $1 \leq p \leq \infty$

on note $f \sim g$ si $f - g = 0$ μ-p.p.

et $L^p(X,\mu) = \mathcal{L}^p(X,\mu)/_\sim$

Définition. $\forall 1 \leq p < \infty$, $\forall f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

$$\text{et } \|f\|_\infty = \sup_{ess} |f|$$

Proposition. $\forall 1 \leq p \leq \infty$, $\forall f, g \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$,

$$f \sim g \Rightarrow \|f\|_p = \|g\|_p$$

et $\|\cdot\|_p$ norme sur $L^p(X,\mu)$

Inégalité de Hölder.

$\forall f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables, $\forall 1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

démo. ($p = q = 2$: Cauchy-Schwarz)

supposons $1 < p, q < \infty$

$$\forall x, y \geq 0, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

en effet si $x, y > 0$

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geqslant \underbrace{\frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q)}_{\substack{= \ln x + \ln y \\ = \ln(xy)}}$$

(car $\ln$ concave sur $\mathbb{R}_+^*$) .

D'où $\displaystyle\int_X |fg|\,d\mu \leqslant \frac{1}{p}\int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{q}\int_X |g|^q d\mu$

$$\leqslant \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q$$

$\Rightarrow \forall a > 0 \displaystyle\int_X |fg|\,d\mu = \int_X a|f|\,\frac{|g|}{a}\,d\mu \leqslant \frac{a^p}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q a^q}\|g\|_q^q$

Soit a tq $\displaystyle a^p\|f\|_p^p = \frac{\|g\|_q^q}{a^q}$

$$\Leftrightarrow \quad a = \left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

Donc $\displaystyle\int_X |fg|\,d\mu \leqslant a^p\|f\|_p^p = \|f\|_p\|g\|_q$

car $\displaystyle\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow pq = p+q$

$\square$

Inégalité de Minkowski

Soit $1 \leq p \leq \infty$

$\forall f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurables,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

démo. (si $1 < p < \infty$)

$$\|f+g\|_p^p = \int_X |f+g|^p \, d\mu \leq \int_X |f| \, |f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \, |f+g|^{p-1} d\mu$$

$$\underset{\text{(Hölder)}}{\leq} \|f\|_p \, \| |f+g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \, \|(f+g)^{p-1}\|_q$$

Soit $q = \frac{p}{p-1}$ ($\Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

On $\|(f+g)^{p-1}\|_q = \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q}$

$$= \|f+g\|_p^{p/q}$$

donc $\|f+g\|_p^p \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \|f+g\|_p^{p/q}$

Or $p - \frac{p}{q} = 1$

donc $\|f+g\|_p = \|f+g\|_p^{p-p/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Remarques. 1) Si $\mu(X) < \infty$

alors $\forall\ 1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) \leq \mathcal{L}^{p_2}(X,\mu) \leq \mathcal{L}^{p_1}(X,\mu) \leq \mathcal{L}^1(X,\mu)$$

2) $X = \mathbb{N}$, $\mu =$ dénombrement

$$\ell^1(\mathbb{N}) \leq \ell^{p_1}(\mathbb{N}) \leq \ell^{p_2}(\mathbb{N}) \leq \ell^\infty(\mathbb{N})$$

~ · ~ · ~

Probabilités

1) Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace de probabilité

$$(P(\Omega) = 1)$$

Une variable aléatoire X est une fonction mesurable

$$X : \Omega \longrightarrow E$$

où $E = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$.

Notation. Si $I \subset E$, $P(X \in I) = P(X^{-1}(I))$

L'application $I \longmapsto P(X \in I)$ est la loi de X.

2) Espérance et variance

a) espérance

Soit X v.a : $\Omega \longrightarrow \mathbb{N}$, $E(X) = \sum_{n \geq 0} n P(X = n)$

Soit X v.a. : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$$

si $\forall I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $P(X \in I) = \int_I f$

b) variance de X

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= E\left((X - E(X))^2\right) \geq 0$$

Exemples (Exercice 4 de la fiche 1)

Université Claude Bernard
PROBABILITÉS

Licence de Mathématiques, L3

Feuille de TD 1

Lois, théorème de transfert

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Exercice 1. Espérance

Soit $X : \Omega \longrightarrow \{-2, 1\}$ une v.a. de loi $\mathbf{P}_X = (1/3)\delta_{-2} + (2/3)\delta_1$.

1. Calculer $\mathbf{E}(|X|)$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbf{E}(X^n)$ existe et calculer sa valeur.
3. Soit $n \geq 1$ un entier fixé, on note $Y = X^n + 1$. Déterminer la loi de Y. En déduire $\mathbf{E}(Y^2)$.

Exercice 2. Lois uniformes

Soit $U : \Omega \longrightarrow [a, b]$ une variable aléatoire de loi $\mathbf{P}_U(\mathrm{d}x) = \alpha \mathbf{1}_{[a,b]}\mathrm{d}x$ pour un certain $\alpha > 0$, où $\mathrm{d}x$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On dit que U a pour loi la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

1. Calculer α.
2. Calculer l'espérance et la variance de U.

Exercice 3. Calcul d'une loi

Soit $U : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ de loi uniforme (c'est-à-dire que $\mathbf{P}_U$ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$). Donnez la loi de la v.a. $X = (-2) \times \mathbf{1}_{[0,1/3]}(U) + \mathbf{1}_{]1/3,1]}(U)$.

Exercice 4. Espérances et variances des lois usuelles

Dans chacun des cas suivants, vérifier qu'on définit bien une variable aléatoire X, et calculer son espérance et sa variance.

1. Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$: $E(X) = p$, $var(X) = p - p^2 = p(1-p)$

$$\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) = p,$$

2. Binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}, p \in [0, 1]$:

$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} = np$

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

$var(X) = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} - n^2p^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$

3. Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$:

$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$ $\quad var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbf{N}$$

4. Géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$:

$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} np(1-p)^n = p(1-p)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n(1-p)^{n-1}}_{\left(\frac{1}{1-x}\right)'(1-p)} = \frac{p(1-p)}{p^2} = \frac{1-p}{p}$

$var(X) = p(1-p)^2\frac{2}{p^3} + \frac{(1-p)}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2}$

$$\mathbf{P}(X = n) = p(1-p)^n, \quad n \in \mathbf{N},$$

$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \left(\frac{1-p}{p}\right) = \frac{(1-p)}{p^2}$

5. Exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx =$

$$\mathbf{P}_X(dx) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}\lambda e^{-\lambda x}dx.$$

$[xe^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$. $var(X) = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2}$

$= \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2}$

$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

Exercice 5. Espérance d'une loi

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbf{P}_X(\mathrm{d}x) = \alpha\, x^2\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x$.

1. Calculer α.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\mathbf{E}(X^n)$.

Exercice 6. Loi géométrique

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Calculer la probabilité que X soit paire.
2. Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{E}(e^{-tX})$.
3. On pose
$$Z = |\cos(\pi X/2)|.(X/2)$$
Déterminer la loi de Z et calculer $\mathbf{E}(Z)$.

Exercice 7. Intégrabilité

Soit Z une variable aléatoire positive.

1. On suppose que Z est à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que $\mathbf{E}(Z) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(Z \geq n)$.
2. $(*)$ On ne suppose plus que Z est à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que
$$\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(Z \geq n) \leq \mathbf{E}(Z) \leq 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(Z \geq n).$$
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que Z soit intégrable.