Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
L3 Mathématiques pour l'enseignement
Partiel du 26 mars 2024

Séries et intégrales

La durée de totale de l'epreuve est d'1h30. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. En utilisant les sommes de Riemann de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, démontrer l'équivalent

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \overset{n\to+\infty}{\sim} cn^{3/2},$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.

Exercice 2.

1. Soit $M > 0$. Démontrer que l'intégrale impropre
$$I(M) := \int_M^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$
converge
2. Démontrer (en intégrant par parties) que
$$I(M) = O(M^{-2}) \quad \text{pour } M \to +\infty.$$

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On se propose de calculer la dérivée de la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_0^{e^{2x}} f\big(x^2 + \cos t\big)\,\mathrm{d}t.$$

1. Poser $\Phi(x,u) = \displaystyle\int_0^u f\big(x^2 + \cos t\big)\,\mathrm{d}t$ et calculer les dérivées partielles $\Phi_x(x,u)$ et $\Phi_u(x,u)$.
2. Poser $g(x) = \Phi(x, e^{2x})$ et en déduire une (longue) formule permettant le calcul de $g'(x)$.

Exercice 4.

1. (Question de cours). Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$. Démontrer que F est dérivable et que $F' = f$.
2. On considère les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, définies par
$$\phi(x) = \frac{x}{|x|} \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \sin(\tfrac{1}{x}), \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}^*$$
et $\phi(0) = \psi(0) = 0$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \phi$ et $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^x \psi$.
   (a) La fonction Φ est-elle dérivable en 0 ?
   (b) La fonction Ψ est-elle dérivable en 0 ? (On pourra effectuer un changement de variable et se servir du résultat de l'Exercice 2.2).

Exercice 5. (Question de cours). Démontrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et $f_n \to f$ uniformément sur $[a,b]$, alors f est continue sur $[a,b]$.