Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
L3 Mathématiques pour l'enseignement
Partiel du 26 mars 2024

Séries et intégrales

La durée de totale de l'epreuve est d'1h30. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. En utilisant les sommes de Riemann de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, démontrer l'équivalent

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \overset{n\to+\infty}{\sim} cn^{3/2},$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.

Solution 1. On a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{k/n} \to \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2/3$. L'équivalent est prouvé avec $c = 2/3$.

Exercice 2.

1. Soit $M > 0$. Démontrer que l'intégrale impropre
$$I(M) := \int_M^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$
converge
2. Démontrer (en intégrant par parties) que
$$I(M) = O(M^{-2}) \quad \text{pour } M \to +\infty.$$

Solution 2. Pour tout $u \in \mathbb{R}^*$, $|\frac{\sin u}{u^2}| \leq \frac{1}{u^2}$ et l'intégrale impropre est absolument convergente sur $[M, \infty[$, et donc convergente, par comparaison avec l'intégrale de Riemann d'exposant 2. De plus

$$|I(M)| = \left|\left[\frac{-\cos u}{u^2}\right]_m^{+\infty} - \int_M^{+\infty} \frac{2\cos u}{u^3}\,\mathrm{d}u\right| \leq \frac{1}{M^2} + \int_M^{+\infty} \frac{2}{u^3}\,\mathrm{d}u \leq \frac{1}{M^2} + \frac{1}{2M^3} = O\Big(\frac{1}{M^2}\Big) \quad \text{pour } M \to +\infty.$$

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On se propose de calculer la dérivée de la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_0^{e^{2x}} f\big(x^2 + \cos t\big)\,\mathrm{d}t.$$

1. Poser $\Phi(x,u) = \displaystyle\int_0^u f\big(x^2 + \cos t\big)\,\mathrm{d}t$ et calculer les dérivées partielles $\Phi_x(x,u)$ et $\Phi_u(x,u)$.
2. Poser $g(x) = \Phi(x, e^{2x})$ et en déduire une (longue) formule permettant le calcul de $g'(x)$.

Solution 3. Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, qui s'applique puisque $(x,t) \mapsto f(x^2 + \cos t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$,

$$\Phi_x(x,u) = \int_0^u 2xf'(x^2 + \cos t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus,

$$\Phi_u(x,u) = f(x^2 + \cos u).$$

Mais $g(x) = \Phi(x, e^{2x})$, alors

$$g'(x) = \Phi_x(x, e^{2x}) + \Phi_u(x, e^{2x})2e^{2x} = \int_0^{e^{2x}} 2xf'(x^2 + \cos t)\,\mathrm{d}t + f\big(x^2 + \cos(e^{2x})\big)2e^{2x}.$$

Exercice 4.

1. **Question de cours.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$. Démontrer que F est dérivable et que $F' = f$.
2. On considère les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, définies par

$$\phi(x) = \frac{x}{|x|} \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \sin(\tfrac{1}{x}), \qquad \text{si } x \in \mathbb{R}^*$$

et $\phi(0) = \psi(0) = 0$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \phi$ et $\Psi(x) = \displaystyle\int_0^x \psi$.

(a) La fonction Φ est-elle dérivable en 0 ?

(b) La fonction Ψ est-elle dérivable en 0 ? (On pourra effectuer un changement de variable et se servir du résultat de l'Exercice 2.2).

Solution 4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Par la continuité de f en x_0 : il existe $\delta > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Or, si $h \neq 0$ et $|h| < \delta$,

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} [f(x) - f(x_0)]\,\mathrm{d}x\right| \le \epsilon.$$

Mais alors $\lim_{h\to 0}\big[\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\big] = 0$, ce qui prouve que $F'(x_0) = f(x_0)$.
Les fonctions Φ et Ψ sont bien définies, puisque g et h sont deux fonctions bornées et continues sauf en un seul point, et donc Riemann-intégrables sur tout intervalle compact.
(a) Un calcul directe permet de montrer que $\Phi(x) = |x|$, qui n'est pas dérivable en 0.
(b) On a $\Psi(0) = 0$. Par le changement de variable $u = 1/t$ on voit que, pour $x > 0$, $\Psi(x) = \int_{1/x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u$.
Mais alors

$$\Psi'(0+) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}(\Psi(x) - \Psi(0)) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\int_{1/x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u = 0.$$

En effet, d'après la question de l'exercice précédent,

$$\int_{1/x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,\mathrm{d}u = I(1/x) = O(x^2), \quad \text{pour } x \to 0+.$$

Ainsi, Ψ est dérivable à droite en 0 et $\Psi'(0+) = 0$. De même, $\Psi'(0-) = 0$, ce qui montre que Ψ est dérivable en 0 et $\Psi'(0) = 0$.

Exercice 5. (Question de cours). Démontrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et $f_n \to f$ uniformément sur $[a, b]$, alors f est continue sur $[a, b]$.

Solution 5. Il s'agit de démontrer que f est continue en tout point $x_0 \in [a, b]$. Soit $\epsilon > 0$. On a $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_N\|_\infty < \epsilon$. De plus, par la continuité de f_N, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in [a, b]$ et $|x - x_0| < \delta$ on a $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon$. Mais alors,

$$\begin{aligned}\forall x \in [a,b],\ |x - x_0| < \delta: \qquad |f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\le 2\|f - f_N\|_\infty + \epsilon \\ &\le 3\epsilon.\end{aligned}$$

Donc f est continue en x_0.