Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

L3 Mathématiques pour l'enseignement

Séries et intégrales Session 2, juin 2023. Durée 90 min.

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. Donner la définition de fonction $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne.
2. Vrai ou faux ? Justifier.
   "Si $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne alors F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$."
3. Vrai ou faux ? Justifier.
   "Si $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors F est lipschitzienne."
4. (a) (Question de cours). Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Démontrer que si f est Riemann intégrable sur l'intervalle $[a,b]$, alors la fonction $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par
   $$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
   est lipschitzienne.
   (b) Montrer ensuite, à l'aide d'un exemple, qu'en général F n'est pas dérivable.

Exercice 2. Calculer le rayon de convergence R de la série entière
$$\sum \frac{n!\,(2n)!}{(3n)!} x^n.$$
(La valeur correcte de R est comprise entre 6 et 7. Vérifier le calcul si ce n'est pas le cas).

Exercice 3.

1. Rappeler la formule donnant la somme d'une série géométrique et calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^3 e^{-nx^2}$.
2. On rappelle la formule $S'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{S(x)-S(0)}{x}$. Calculer cette limite et en déduire la valeur de la dérivée de S en zéro.
3. En déduire que, si l'on pose $f_n(x) = x^3 e^{-nx^2}$, alors l'égalité
   $$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big)'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x), \tag{*}$$
   est *fausse* pour $x = 0$.
4. Énoncer un théorème sur les suites de fonctions dérivables garantissant la validité de l'égalité (*). Quelle hypothèse fait défaut ici ?