Séries et intégrales. Exercices.

Lorenzo Brandolese

1 Continuité uniforme

Exercice 1.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer, à l'aide du théorème de Bolzano–Weierstrass, que l'on peut extraire de la suite complexe $(e^{in\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente.

Exercice 1.2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non majorée. Montrer que l'on peut construire une sous-suite strictement croissante tendant vers $+\infty$.

Exercice 1.3. Démontrer qu'une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède aucune sous-suite convergente si et seulement si $|x_n| \to +\infty$.

Exercice 1.4. Démontrer de deux manières différentes que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

i) Avec la définition : on pourra se servir de l'identité $x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

ii) En applicant le théorème d'Heine et l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 1.5. Dire si les fonctions suivantes sont uniformément continues et/ou lipschitziennes sur l'intervalle I indiqué :

$$f(x) = 1/x, \quad I = [1, +\infty[; \qquad f(x) = \ln x, \quad I =]0, 1]$$
$$f(x) = \sin(x^2), \quad I = \mathbb{R}; \qquad f(x) = x\ln(x), \quad I =]0, \infty[.$$

Exercice 1.6. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'un intervalle I et $f\colon I \to \mathbb{R}$, est uniformément continue, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Exercice 1.7. Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 1.8. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$ telle que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Le résultat subsiste-t-il si on suppose seulement que f est continue ?

Exercice 1.9. Soit $f\colon]0, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 1.10. Soit $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que f est majorée par une fonction affine.

Exercice 1.11. Étudier la continuité uniforme de la fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \|x\|^\alpha$, en fonction du paramètre $\alpha > 0$.

2 Intégrale de Riemann

Exercice 2.1. Soit $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3\sin(2x)$. Construire une subdivision de $[0,\pi]$ telle que $\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leq \frac{1}{100}$.

Exercice 2.2. (Méthode d'Archimède pour calculer $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$, 2000 ans avant le calcul différentiel !)
Écrire les sommes de Darboux Σ^{Δ} et Σ_{Δ} pour la fonction $x \mapsto x^2$ et la subdivision uniforme Δ de l'intervalle $[0,1]$, avec pas $1/n$. Étudier la limite pour $n \to +\infty$ de ces sommes. En déduire que $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 1/3$.
(Indication : utiliser la formule $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

Exercice 2.3. Soient $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées Riemann-intégrables telles que $f \leq g$. Montrer que $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Exercice 2.4 (Règle de Chasles)**.** Démontrer que, si $c \in]a,b[$, et f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors f est intégrable aussi sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Exercice 2.5. Démontrer que si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, à valeurs positives, telle que $\int_a^b f = 0$, alors f est nulle sur $[a,b]$.

Exercice 2.6. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et soit $c \in]a,b[$. Supposons que f soit intégrable sur $[a, c-\delta]$ et sur $[c+\delta, b]$ pour tout $\delta > 0$ arbitrairement petit.

- Montrer que f est intégrable sur $[a,b]$ et que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- En déduire que si f est bornée et continue par morceaux sur $[a,b]$ (c'est à dire continue sauf en un nombre fini de points), alors f est Riemann-intégrable.

2.1 Sommes de Riemann

Exercice 2.7. En utilisant la convergence des sommes de Riemann vers une intégrale, démontrer que:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k^2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2.8. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$, où

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2(n^3+k^3)^{1/3}}, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\Big(\frac{k\pi}{n+1}\Big).$$

2.2 Dérivation de fonctions définies par une intégrale

Exercice 2.9. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$g(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad g(x) = \int_0^{x^2} e^t \arctan(t+x)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2.10. Démontrer que, si f est continue en 0, alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(0)}{2}.$$

2.3 Calculs d'intégrales

Exercice 2.11. Calculer les intégrales en intégrant par parties.

$$\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2.12. Calculer les intégrales en effectuant un changement de variables.

$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{2t\ln(t)+t}.$$

Exercice 2.13. Démontrer, à l'aide d'un calcul d'intégrale, que l'aire d'un disque de rayon $r>0$ est $\pi\, r^2$. Comment calculer l'aire d'une ellipse de demi-axes a et b ?

3 Intégrales dépendant d'un paramètre et intégrales impropres

Exercice 3.1. Pour chacune des intégrales suivantes, déterminer si elle est convergente ou divergente en utilisant la définition. Lorsqu'elle est convergente, préciser sa valeur.

$$\int_0^2 \ln t\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad (\alpha>0).$$

Exercice 3.2. Énoncer et démontrer les critères de comparaison et des équivalents, pour les intégrales impropres de type $\int_a^{+\infty}\dots$ de fonctions intégrables sur tout intervalle $[a,b]$, avec $b>a$.

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

$$1)\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad 2)\int_0^{+\infty} \frac{t^3+1}{(t^4+1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3.3. Discuter en fonction du paramètre réel α la convergence des intégrales suivantes :

$$1)\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t, \qquad 2)\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3.4. Soit $\beta>0$. Discuter selon β la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$.

On pourra calculer explicitement $\displaystyle\int_2^b \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$ pour b réel destiné à tendre vers $+\infty$.

Exercice 3.5. 1) Soit $\alpha>0$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ converge, puis en déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrer par parties).

2) Soit $\beta>1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(s^\beta)\,ds$ converge (effectuer un changement de variable).

Exercice 3.6. (Cet exercice poursuit et complète l'exercice précédent).

1) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (linéariser $\sin^2 t$).

En déduire que la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolue.

2) Vérifier que quand $t\to+\infty$,

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \sim \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t}$$

mais que pourtant $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t}\right)\mathrm{d}t$ ne sont pas de même nature.

Exercice 3.7. Soit $g(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(tx)\, dt$. Montrer que g est définie et dérivable dans $\mathbb{R}$. Montrer que $g'(x) = -xg(x)/2$ et calculer ensuite $g(x)$.

Exercice 3.8. Soit $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\, dx$.

1. Montrer que $I(\alpha)$ est définie pour tout $\alpha \geq 0$.
2. Montrer qur $I\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, $\alpha > 0$, sous forme d'intégrale.
3. Montrer que I est continue en 0.
4. Déduire de ce qui précède la valeur de $I(\alpha)$, $\alpha \geq 0$.

Exercice 3.9. Soient α et β deux fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x-t)\, dt$$

est dérivable, et donner une formule permettant de calculer $G'(x)$.

Exercice 3.10. Pour $x \in \mathbb{R}^+$ on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\, \mathrm{d}t, \qquad G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t\right)^2, \qquad H(x) = F(x) + G(x).$$

1. Démontrer que F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $H'(x) = 0$.
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $H(x) = H(0) = \frac{\pi}{4}$. Ensuite, en prenant la limite pour $x \to +\infty$, en déduire que $\int_0^\infty e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3.11.

1. Pour $x \geq 0$ on pose $F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{t^2+i}\, dt$. Montrer que F est continue sur $[0, \infty[$ et telle que $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0, \infty[$ et qu'elle est solution sur $]0, \infty[$ d'une équation différentielle du premier ordre (Rappel : $\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).
3. Prouver la convergence de l'intégrale de Riemann impropre $\int_0^\infty \frac{e^{-iu}}{\sqrt{u}}\, du$.
4. Démontrer, pour tout $x > 0$ les formules

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{ix} \int_x^\infty \frac{e^{-iu}}{\sqrt{u}}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-iu}}{\sqrt{u+x}}\, du.$$

   Montrer ensuite que ces égalités sont encore vraies en $x = 0$.

4 Suites et séries de fonctions

4.1 Suites d'intégrales et convergence uniforme

Exercice 4.1. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ dans chacun des cas suivants:

$$f_n(x) = \frac{\cos(x)}{n} \text{ sur } \mathbb{R}; \qquad f_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) \text{ sur } \mathbb{R} \; ; \qquad f_n(x) = e^x + \frac{\sin nx}{n+e^x} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 4.2. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$, où

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2},$$

sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$, ensuite sur les intervalles $[a\,,+\infty[$, où $a > 0$. La convergence est-elle uniforme sur l'intervalle $]0,+\infty[$?

Exercice 4.3. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x^2}$$

Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout intervalle borné $[a,b]$. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[a\,,+\infty[$. Calculer (sans chercher à calculer $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4.4. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$$

Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions. Calculer $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Exercice 4.5. Soit $f\colon [0,2]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $\epsilon_n \to 0+$. Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions:

$$f_n(x) = \frac{1}{\epsilon_n}\big(f(x+\epsilon_n) - f(x)\big).$$

Exercice 4.6. Montrer, sans chercher à calculer les intégrales, que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/4}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 4.7. Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Calculer la limite

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Indication : On pourra écrire $f(x) = f(1) + (f(x)-1)$ et exploiter la continuité de f en 1).

Exercice 4.8. Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R}^+)$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\int_a^b f(x)^n\,\mathrm{d}x\Big)^{1/n} = \max_{[a,b]} f.$$

(Indication. Pour l'inégalité $\geq$, utiliser la continuité de f au point x_0 où f atteint son maximum et minorer f au voisinage de x_0).

Exercice 4.9. Construire une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dérivables sur $[-1,1]$ qui converge unifomément sur $[-1,1]$ vers la fonction non dérivable f, où $f(x)=|x|$.

Que peut-on dire de la convergence de la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$?

4.2 Suites de Cauchy et espaces de Banach

Exercice 4.10. Vérifier de plusieurs manières si la suite réelle $x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ est de Cauchy.

Exercice 4.11. Les suites de Cauchy d'un espace normé sont-elles bornées ? Réciproquement, les suites bornées sont-elles de Cauchy ? Justifier.

Exercice 4.12. Une partie A d'un espace vectoriel normée est *complète* si toutes les suites de Cauchy de A convergent dans A. Etablir si les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont complètes : $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $]0,1]$, $[0,+\infty[$, $\mathbb{Z}$.

Exercice 4.13. En utilisant l'exercice 4.9, démontrer que l'espace $C^1([-1,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $f\mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]}|f(x)|$, n'est pas un espace de Banach.

Montrer qu'avec la norme $f\mapsto |||f||| \equiv \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ cet espace est de Banach

Exercice 4.14. On note ℓ^∞ l'espace des toutes les suites réelles bornées. Démontrer que $\ell^\infty = B(\mathbb{N},\mathbb{R}) = C_b(\mathbb{N},\mathbb{R})$. En déduire que ℓ^∞ est un espace de Banach une fois muni de la norme $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$.

Exercice 4.15. Soit $c_0 = \big\{(x_n)\subset\mathbb{R}\colon \lim_{n\to\infty}x_n = 0\big\}$. On munit c_0 de la norme $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$. Montrer que $(c_0,\|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

4.3 Convergence des séries de fonctions

Exercice 4.16. Pour chacune des séries de fonctions suivantes, déterminer s'il y a ou non convergence simple, convergence uniforme, convergence normale (dans l'ordre qui vous semblera le plus approprié, à chaque cas).

1) $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n^2}$, sur $[-1,1]$, puis sur $[-2,2]$,

2) $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2x}$ sur $[1,2]$, puis sur $]0,\infty[$.

3) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$, sur $[a,\infty[$ avec $a>0$, puis sur $[0,\infty[$

4) $\displaystyle\sum \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$, sur $[0,\infty[$, puis sur $[0,1]$.

Exercice 4.17. Pour $x\in[0,+\infty[$, et $n\geq1$, on pose

$$u_n(x) = \frac{x^2}{n^3+2x^3}.$$

La série de fonctions $\sum u_n$ est-elle simplement convergente sur $[0,\infty[$? Et normalement convergente ? Soit $n\geq 1$. Montrer que pour tout entier k avec $n\leq k\leq 2n$, $u_k(n)\geq\frac{1}{17n}$. En déduire que $\Big\|\sum_{k=n+1}^{2n}u_k\Big\|_\infty \geq \frac{1}{17}$. La série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniformément convergente ?

Exercice 4.18. Pour les x réels où cette série converge, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité éventuelle de f sur son domaine de définition. Montrer que la fonction f est strictement décroissante. Étudier la limite éventuelle de f en $+\infty$.

Exercice 4.19. Pour $x \in]1,+\infty[$, et $n \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{n+x^n}$. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur l'intervalle $]1,\infty[$.

Exercice 4.20. Pour les x réels strictement positifs où cette série converge, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

Montrer que cette fonction est définie sur $]0,+\infty[$, puis montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 4.21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la suite de fonctions $f_n(x) = x^3 e^{-nx^2}$.

1. Démontrer que la série $\sum f_n$ est normalement convergente dans $\mathbb{R}$.
2. Rappeler la formule donnant la somme d'une série géométrique et calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^3 e^{-nx^2}$.
3. On rappelle la formule $S'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{S(x)-S(0)}{x}$. Calculer cette limite et en déduire la valeur de la dérivée de S en zéro.
4. En déduire que, si l'on pose $f_n(x) = x^3 e^{-nx^2}$, alors l'égalité

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big)'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x), \qquad (*)$$

   est *fausse* pour $x = 0$. Expliquer.

Exercice 4.22. (Transformée d'Abel et applications)

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Montrer que

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}) + E_{m,n} \qquad \text{(transformée d'Abel)}$$

   pour un terme d'erreur $E_{m,n}$ que l'on déterminera.
2. En déduire que que si les sommes partielles de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées et $b_n \searrow 0$, alors la série $\sum a_n b_n$ converge.
3. On se propose de démontrer que si $b_n \searrow 0$, alors $\sum b_n \cos(nx)$ converge uniformément dans tout intervalle de la forme $[\theta, 2\pi - \theta]$, $0 < \theta < \pi$.
   - Soit $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$. Démontrer qu'il existe $M > 0$ telle que, $\forall x \in [\theta, 2\pi-\theta]$, $|A_n(x)| \leq M$. (Penser à prendre la partie réelle de $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$).
   - En appliquant une transformée d'Abel, montrer que les sommes partielles de $(b_n \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément de Cauchy et conclure.

4.4 Séries entières

Exercice 4.23. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ suivantes :

$$a_n = \ln n, \qquad a_n = (\ln n)^n, \qquad a_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad a_n = \arcsin\Big(\frac{n+1}{1+n\sqrt{2}}\Big) - \frac{\pi}{4}, \qquad a_n = \frac{\alpha^n}{1+\beta^n}, \quad (\alpha, \beta > 0)$$

Exercice 4.24. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ suivantes et puis calculer leur sommes.

$$a_n = n, \qquad a_n = n^2, \qquad a_n = \frac{1}{n(n+2)}, \qquad a_n = \frac{1}{n}, \qquad a_n = \cos\Big(\frac{2n\pi}{3}\Big).$$

Exercice 4.25. Calculer la somme des séries entières réelles suivantes, après avoir déterminé leur rayon de convergence.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\big(3+(-1)^n\big)^n} x^n.$$

Exercice 4.26. Calculer le développement en série entière centré en zéro des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}, \qquad g(x) = \ln(x^2 - 5x + 6), \qquad h(x) = \int_0^x \cos(t^2)$$

Exercice 4.27. Calculer, selon les valeurs du paramètre réel t, le développement en série entière de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2tx + 1}.$$

Exercice 4.28. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière, vérifiant l'équation différentielle

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x) = e^x.$$

Calculer les coefficients a_n, $n \in \mathbb{N}$. Calculer le rayon de convergence de la série entière définissant f.

Exercice 4.29. Montrer que l'équation différentielle $3xy' + (2-5x)y = x$ admet une solution développable en série entière autour de zéro.

Exercice 4.30. Démontrer que, pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ et que $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.

5 Équations différentielles

5.1 Contractions et points fixes

Exercice 5.1. Établir si $f(x) = \ln(1+x^2)$ est contractante en tant qu'application :
(i) $f\colon [2,+\infty[\to \mathbb{R}$, (ii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (iii) $f\colon]1,+\infty[\to \mathbb{R}$.

Exercice 5.2. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$. Donner une condition suffisante sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour que l'application $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soit contractante. Même question lorsque l'on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$.

Exercice 5.3. Démontrer le résultat de point fixe suivant : *Toute fonction continue* $f\colon [0,1] \to [0,1]$ *possède au moins un point fixe*. (On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $x \mapsto f(x) - x$).

Exercice 5.4. Pour quelles valeurs de α, β, γ, l'application $T\colon C_b(\mathbb{R}.\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, définie par $f \mapsto T(f)$, où $\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f)(x) = \alpha f(x+\beta) + \gamma$, est-elle une contraction ? Donner, dans ce cas, l'unique point fixe de T. (Indication : considérer les fonctions constantes).

Dans le cas $\alpha = 1$, $\beta = 2\pi$ et $\gamma = 0$, montrer que T possède plusieurs points fixes.

Exercice 5.5.
1. Démontrer qu'une fonction $x = x(t)$ est solution du problème $(*)$ si et seulement si $x = x(t)$ est solution du problème $(**)$:

$$(*) \begin{cases} x \in C^1([-1,1],\mathbb{R}) \\ x'(t) = \dfrac{1}{2}\sin(x(t)) \quad \forall t \in [-1,1] \\ x(0) = 1. \end{cases} \qquad (**) \begin{cases} x \in C([-1,1],\mathbb{R}) \\ x(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t \frac{1}{2}\sin(x(s))\,ds \quad \forall t \in [-1,1] \end{cases}$$

2. Soit $E = C([-1,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Définir une contraction $\phi\colon E \to E$ telle que x_0 est un point fixe pour ϕ si et seulement si x_0 est solution de $(**)$. Conclure que le problème $(*)$ possède une et une seule solution.

Exercice 5.6. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n$, $n \geq 0$. On veut montrer le résultat suivant : *il existe un unique choix de* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $(x_n) \subset [10,11]$

1. Montrer que $Y = \{\, (y_n) \in \ell^\infty \colon (y_n) \subset [10,11] \,\}$, est une partie complète de ℓ^∞, muni de la norme du sup.
2. Soit $F((y_n)) = (z_n)$, où $z_n = \sqrt{100 + y_{n+1} - \sin n}$. Montrer que $F\colon Y \to Y$ est bien définie et contractante.
3. Conclure.

Exercice 5.7. Soient $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \leq 5\big\}$. Trouver un ensemble (aussi grand que possible) de paramètres (α,β) tels que le système

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha(1 + e^{x-5} + \cos y) \\ y = 3 + \beta(e^{x-5} - \sin y) \end{cases}$$

ait exactement une solution dans A.
(*Indication :* On pourra chercher une application contractante $\phi\colon (A,\|\cdot\|_1) \to (A,\|\cdot\|_1)$ où $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$).

5.2 Équations différentielles

Exercice 5.8 (Variation de la constante)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes en trouvant une solution particulière par la méthode de variation de la constante :

1. $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0; +\infty[$
2. $y' - y = x^k \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}$
3. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 5.9.

1. Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + 1)y' + 2xy = 3x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$, en commeçant par trouver une solution particulière évidente. Tracer les courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(0) = 3$.
2. Résoudre l'équation différentielle $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$ sur $]0, \pi[$, en commeçant par trouver une solution particulière évidente. Tracer des courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Exercice 5.10. On considère l'équation différentielle non-linéaire

$$y' - e^x e^y = a$$

Déterminer ses solutions, en précisant soigneusement leurs intervalles de définition, pour $a = 0$. Même question avec $a = -1$ (faire le changement de fonction inconnue $z(x) = x + y(x)$. Dans chacun des deux cas, construire la courbe intégrale qui passe par l'origine.

Exercice 5.11. Pour les équations différentielles suivantes, trouver les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier :

$$x^2y' - y = 0, \qquad\qquad xy' + y - 1 = 0$$

Exercice 5.12. Démontrer que le problème de Cauchy non-linéaire

$$\begin{cases} y' = |y| + |t| \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

possède une solution $y(t)$ définie sur $\mathbb{R}$. Construire cette solution. (Indication : on commencera par construire une solution $y \geq 0$ pour $t \geq 0$. Ensuite une solution $y \geq 0$ pour pour $-1 \leq t \leq 0$. Ensuite une solution $y \leq 0$ pour $t \leq -1$. Raccorder en $t = 0$ et $t = -1$ en imposant la condition de dérivabilité).

Exercice 5.13 (équations de Bernoulli)**.** Montrer que l'équation de Bernoulli

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \qquad n \in \mathbb{Z} \quad n \neq 0, n \neq 1$$

se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.

Trouver les solutions de l'équation $xy' + y - xy^3 = 0$.

Exercice 5.14 (équations de Riccati)**.** Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$

alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli (avec $n = 2$).

Résoudre l'équation $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution.

Exercice 5.15. Résoudre

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$

2. $y'' + 2y' + 2y = 0$

3. $y'' - 2y' + y = 0$

4. $y'' + y = 2\cos^2 x$

Exercice 5.16. On considère $y'' - 4y' + 4y = d(x)$. Résoudre l'équation homogène, puis trouver une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$, puis $d(x) = e^{2x}$. Donner la forme générale des solutions quand $d(x) = \frac{1}{2}\cosh(2x)$.

Exercice 5.17. Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide du changement de variable suggéré.

1. $x^2y'' + xy' + y = 0$, sur $]0; +\infty[$, en posant $x = e^t$;

2. $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + my = 0$, sur $\mathbb{R}$, en posant $x = \tan t$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$).

Exercice 5.18.

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle $x^2y'' + y = 0$ (utiliser le changement de variable $x = e^t$).

2. Trouver toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 5.19. Trouver la solution générale des équations différentielles

$$u''' + 6u'' + 11u' + 6 = 0, \qquad u''' + 3u'' = 0, \qquad u^{(4)} + 2u'' + u = 0, \qquad u''' - u' = (3 - t)e^{2t}.$$

Exercice 5.20. Trouver les solutions du système différentiel triangulaire $U'(t) = AU(t)$, où $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.21. Considérer le système différentiel

$$\begin{cases} u' + u - v = e^t \\ v' - 4u + v = t + 3. \end{cases}$$

Démontrer que u vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et la résoudre. En déduire la solution générale du système.

Exercice 5.22. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de vecteurs propres de A et en déduire la solution générale du système différentiel $U'(t) = AU(t)$. Trouver l'unique solution vérifiant la condition $U(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 5.23. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Construire la solution générale du système $U'(t) = AU(t)$. Indication : Chercher une solution générale de la forme $t \mapsto ae^{\lambda_0 t}\vec{v} + be^{\lambda t}\vec{w} + cte^{\lambda t}\vec{z}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$ où λ_0 est la valeur propre simple et λ la valeur propre double de A.