Université Claude Bernard L3 Probabilités | Mathématiques

TP 2

On rappelle que la commande `help` X permet d'obtenir une aide détaillée sur la commande X.

Exercice 1 Loi des grands nombres et théorème central limite

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{1}{\lambda})$, où λ est les deux derniers chiffres de votre numéro d'étudiant (si votre numéro est 12027045, alors $\lambda = 45$, si votre numéro se termine par deux zéros comme pour 12027500, vous prenez les deux nombres suivants soit donc dans ce cas $\lambda = 75$).

On rappelle que ici, pour être conforme avec Python, que si X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1/\lambda$ est une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant, pour $k \geqslant 1$,

$$P(X = k) = pq^{k-1}.$$

Posons

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad Z_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}$$

où $m = E(X_1)$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$.

1. **Loi forte des grands nombres.**
   - (a) Simuler 10 réalisations indépendantes $(\bar{x}_1^{(i)}, \cdots, \bar{x}_{1000}^{(i)})$ de $(\bar{X}_1, \cdots, \bar{X}_{1000})$, pour $i = 1, \cdots, 10$ et représenter ces suites sur le même graphique.
   - (b) *Donner les valeurs* de $\bar{x}_{1000}^{(i)}$, $i = 1, \cdots, 10$.
   - (c) Donner la valeur de m (ou pourra regarder sur wikipedia ou dans un livre) et comparer avec les 10 valeurs obtenues $(\bar{x}_{1000}^{(i)})_{i\in\{1,\cdots,10\}}$. Quel type de convergence illustre-t-on ici ?
2. **Théorème Central limite.**
   - (a) Calculer, ou trouver sur wikipedia, la valeur de σ.
   - (b) Simuler 1000 réalisations indépendantes $z_1^{(i)}, z_3^{(i)}, z_{100}^{(i)}$ de Z_1, Z_3, Z_{100}, pour $i = 1, \cdots, 1000$, et représenter l'histogramme illustrant les lois respectives de Z_1, Z_3, Z_{100} sur 3 graphiques côte à côte. On pourra utiliser

     ```
     fig,ax = plt.subplots(1,3)
     ax[0].hist(...)
     ax[1].hist(...)
     ...
     ```
   - (c) Quel type de convergence illustre-t-on ici ? Commenter
3. **Théorème Central limite, suite.**
   - (a) Simuler 1000 réalisations indépendantes $z_2^{(i)}, z_{10}^{(i)}, z_{100}^{(i)}$ de Z_2, Z_{10}, Z_{100}, pour $i = 1, \cdots, 1000$, et représenter les fonctions de répartition empirique des lois respectives de Z_2, Z_{10}, Z_{100} sur le même graphique.

     On rappelle que si on a $(X_1, \cdots, X_n)$, n valeurs d'un échantillon, la fonction de répartition empirique est la fonction

     $$t \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{]-\infty,t]}(X_i)$$

     On pourra pour cela adapter la ligne suivante :

     ```
     plt.plot(np.sort(z),np.arange(len(z))/len(z))
     ```
   - (b) Quel type de convergence illustre-t-on ici ? Commenter
   - (c) Simuler 10 réalisations indépendantes $(z_1^{(i)}, \cdots, z_{100}^{(i)})$ de $(Z_1, \cdots, Z_{100})$, pour $i = 1, \cdots, 10$ et représenter ces suites sur le même graphique. Qu'observe-t-on (ou n'observe t'on pas) ? Commenter.

Exercice 2 Processus de Galton-Watson

On s'intéresse à la simulation d'un processus de branchement. On rappelle qu'on peut le définir par récurrence à partir du nombre initial d'individus Z_0 comme

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{i,n+1},$$

si $Z_n > 0$ sinon on pose, comme dans le cours, $Z_{n+1} = 0$. On rappelle que $(\xi_{i,n})_{n,i\in\mathbb{N}}$ sont des v.a. i.i.d à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont on note μ la loi, appelée **loi de branchement**.

0. Que réalise la ligne de commande suivante ?

```
mu=[0.25,0.5,0.25]
x = sum([ np.random.rand(1)> p for p in np.cumsum(mu)])
```

1. (a) Comprendre et exécuter le code suivant, qui simule 300 générations d'un processus, pour la loi de branchement $\mu(0) = \mu(2) = \frac{1}{4}, \mu(1) = \frac{1}{2}$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
mu=[0.25,0.5,0.25] #loi de branchament
T=300 #nombre de générations simulées
Z=np.zeros(T+1,int)
Z[0]=1 #population initiale
for t in range(T):
    u=np.random.rand(Z[t])
    xi = np.sum( np.array([ u> p for p in np.cumsum(mu) ]),0  )
    Z[t+1] = np.sum(xi)
```

   (b) Tracer le graphe du nombre d'individus en fonction du temps. Effectuer plusieurs simulations pour voir si le comportement observé est toujours le même.

   (c) Que prévoit la théorie ? Est-ce cohérent avec les observations de la question précédente ?

   (d) Modifier le code ci-dessus pour arrêter la génération quand la population dépasse `N` individus ou s'éteint (et afficher dans ce cas le nombre de générations effectuées et la population finale).

2. Comparer graphiquement les comportements pour les lois initiales suivantes, et vérifier si cela est conforme à ce que prédit la théorie. Attention, commencer par simuler un petit nombre de générations, car la taille de la population peut parfois croître exponentiellement vite). On pourra également transformer le programme proposé à la question 1 en une fonction prenant en entrée `mu` et `T`.

   (a) $\mu(0) = 0.25, \mu(1) = 0.55, \mu(2) = 0.2$

   (b) $\mu(0) = 0.25, \mu(1) = 0.45, \mu(2) = 0.3$

   (c) $\mu(0) = 0.9, \mu(10) = 0.1$

   (d) $\mu(0) = 0.9, \mu(11) = 0.1$

3. On reprend la loi de branchement de la question (2b).

   (a) Calculer la probabilité d'extinction théorique pour ce processus.

   (b) Vérifier expérimentalement que la probabilité d'extinction observée correspond à la valeur théorique (en simulant un grand nombre de populations).