Université Claude Bernard
Année universitaire 2023 – 2024

Licence de Mathématiques
PROBABILITÉS

Partiel du 13 mars 2023 - Durée : 2 heures

Les téléphones et les objets connectés et les documents sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées et la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Une loi peut être donnée par la mesure-image, les probas atomiques ou la densité.

Rendez les 2 parties dans la copie séparées : chacune est corrigée par un correcteur différent.

PARTIE 1

Exercice 1 `Calcul de loi`

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique sur $\mathbb{N}$, de paramètre $p \in]0,1[$,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = pq^k$$

où $q = 1 - p$.

1. Calculer la probabilité que X soit impaire.
2. On définit la variable
$$Y = \left|\sin\left(\pi\frac{X}{2}\right)\right| \times \frac{X-1}{2}.$$
Dans quel ensemble Y prend-elle ses valeurs ?
3. Calculer $\mathbb{P}(Y=0)$ puis déterminer la loi de Y.
4. En déduire son espérance $\mathbb{E}(Y)$. *Indication : On pourra étudier la série* $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$.

Exercice 2 `Convergence`

On note $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = \min_{i\leq n}(X_i)$ et $Z_n = \max_{i\leq n}(X_i)$.

1. Pour tout $n \geq 1$, déterminer la loi de Z_n.
2. Montrer que la suite (Z_n) converge en probabilité vers 1.
3. Montrer que la suite (Z_n) converge presque sûrement vers 1.
4. Pour tout $n \geq 1$, expliciter la fonction de répartition de Z_n^n.
5. En déduire la densité de la loi de Z_n^n.
6. Pour tout $n \geq 1$ et tous réels y et z, déterminer $\mathbb{P}(Y_n \geq y, Z_n \leq z)$.
7. Les variables Y_n et Z_n sont-elles indépendantes ?

TOURNEZ LA PAGE SVP.

PARTIE 2

Exercice 3 `Convergence (bis)`

1. Définissez la convergence presque sûre.
2. Définissez la convergence en probabilité.
3. Montrer que la convergence L^1 implique la convergence en probabilité. *On rappelle qu'une suite de variables aléatoires* $(X_n)_{n\geq 0}$ *converge vers* X *dans* L^1 *si* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0$.

Exercice 4 `Indépendance et covariance`

Soit $U : \Omega \longrightarrow [0,1]$ une variable aléatoire de loi uniforme. On pose

$$X = -\mathbf{1}_{[0,1/4[}(U) + \mathbf{1}_{[1/4,1/2[}(U), \quad X' = -\mathbf{1}_{[1/2,3/4[}(U) + \mathbf{1}_{[3/4,1]}(U) \text{ et } A = \{X = X'\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$, puis que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X'}$.
2. Établir que $\mathbb{E}[XX'] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X']$.
3. Montrer que les variables aléatoires X et X' ne sont pas indépendantes.

Exercice 5 `Puissances d'une loi exponentielle.`

Soit X une variable de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ (on rappelle que sa densité sur $\mathbb{R}$ est donnée par $1_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-x}$).

1. Que vaut $\mathbb{E}[X]$?
2. Soit $\lambda > 0$, quelle est la loi de $\frac{1}{\lambda}X$?
3. Donner la loi de la variable aléatoire $Y := X^2$.
4. Pour tout $a > 0$, on note Z_a la variable aléatoire définie par $Z_a := e^{aX}$. Donner la loi de la variable aléatoire Z_a pour tout $a > 0$.
5. Pour quelles valeurs de $a > 0$, la variable Z_a est-elle dans L^1 ?