Université Claude Bernard
Année universitaire 2023 – 2024

Licence de Mathématiques
PROBABILITÉS

**Partiel du 6 mars 2023 - Enoncé et correction**

## PARTIE 1

**Exercice 1 Partie entière d'une loi exponentielle**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1 (c'est-à-dire, dont la densité est donnée par $f(t) = \exp(-t)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)$, $t \in \mathbf{R}$).

On note $Y = \lceil X \rceil$ sa partie entière "supérieure", c'est-à-dire que $\lceil 1.5 \rceil = 2$ et $\lceil 3 \rceil = 3$.

1. Calculer la loi de $Y$.
2. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0, 1]$, calculer $P(Y - X \leq t,\ Y = k)$.
3. En déduite la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = Y - X$.
4. Montrer que $Z$ est une variable aléatoire à densité et calculer sa densité.

**Correction 1**

1. $Y$ est une variable aléatoire discrète à valeurs entières $k \geq 1$. Concrètement :
$$P(Y = k) = \int_{k-1}^{k} e^{-t} dt = (e - 1)e^{-k}.$$
Accessoirement, il s'agit d'une loi géométrique décalée de 1.
2. Pour $0 \leq t < 1$, on a :
$$P(Y - X \leq t,\ Y = k) = \int_{k-t}^{k} e^{-t} dt = (e^t - 1)e^{-k}.$$
Pour $t = 1$, on a :
$$P(Y - X \leq t,\ Y = k) = P(Y = k) = (e - 1)e^{-k}.$$
3. Notons cette fonction $F_Z$. Pour $t < 0$ et $t \geq 1$, on a respectivement $F_Z(t) = 0$ et $F_Z(t) = 1$. Pour $0 \leq t < 1$, il faut sommer sur $k$ la formule obtenue ci-dessus :
$$P(Z \leq t) = \sum_{k \geq 1} P(Z \leq t,\ Y = k) = \sum_{k \geq 1} (e^t - 1)e^{-k} = e^{-1} \sum_{m \geq 0} (e^t - 1)e^{-m} = (e^t-1)/(e-1).$$
4. Vu la formule ci-dessus, $F_Z$ est continue et (sauf peut-être en 0 et en 1) de classe $C^1$. En dérivant $P(Z \leq t)$, $Z$ est donc une variable aléatoire à densité donnée par :
$$\frac{e^t}{e - 1}\ 1_{0<t<1}\ dt.$$

**Exercice 2 Une suite de variables aléatoires**

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère la fonction $f_n$ définie par

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x) n^2 x \exp(-n^2x^2/2).$$

1. Montrer que $f_n$ est la densité d'une variable aléatoire.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout entier $n \geq 1$, $X_n$ admet pour densité $f_n$. Démontrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers 0.
3. Converge-t-elle dans l'espace $L^2$ ? *On rappelle qu'une suite de variables aléatoires* $(Y_n)$ *converge vers* $Z$ *dans* $L^2$ *si* $\lim_{n\to\infty} E[(Y_n - Z)^2] = 0$.
4. Montrer que $(nX_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers une variable que l'on identifiera par sa densité.

**Correction 2**

1. Il suffit de calculer :
$$\int_{\mathbf{R}} f_n(x)dx = \Big[ - exp(-n^2x^2/2)\Big]_{x=0}^{+\infty} = 1.$$
2. Pour tout $\epsilon > 0$,
$$P(|X_n| > \epsilon) = \int_{x=\epsilon}^{+\infty} n^2 x \exp(-n^2x^2/2)\ dx = \Big[ - exp(-n^2x^2/2)\Big]_{x=\epsilon}^{+\infty} = \exp(-n^2\epsilon^2/2).$$
Quand $n$ tend vers $+\infty$, cette quantité tend bien vers 0 donc on a convergence en probabilité.
3. Prouvons que $X_n$ tend aussi vers 0 dans $L^2$ (le calcul fait sens car on calcule l'espérance d'une variable aléatoire positive) :
$$E(X_n - 0)^2 = \int_{x=0}^{+\infty} x^2 n^2 x \exp(-n^2x^2/2)\ dx.$$
En faisant le changement de variables $y = nx$, on se retrouve avec
$$E(X_n - 0)^2 = \frac{1}{n^2} \int_{y=0}^{+\infty} y^3 \exp(-y^2/2)\ dy.$$
Par croissance comparée, on voit qu'on se retrouve avec $1/n^2$ multiplié par une constante finie : la limite recherchée vaut bien 0 et la suite $(X_n)$ converge vers 0 dans $L^2$.
4. Notons $Y_n = nX_n$ et regardons la fonction de répartition correspondante $F_{Y_n}$. Clairement, $F_{Y_n}(t) < 0$ pour $t \leq 0$. Pour $t > 0$ :
$$\begin{aligned} F_{Y_n}(t) &= P(nX_n \leq t) = P(X_n \leq t/n) = \int_{x=0}^{t/n} n^2 x \exp(-n^2x^2/2)\ dx \\ &= \Big[ - exp(-n^2x^2/2)\Big]_{x=0}^{t/n} = 1 - \exp(-x^2/2). \end{aligned}$$
On voit donc que la suite $Y_n$ est constante en loi (et donc convergente). La fonction de répartition obtenue ci-dessus est continue, et $C^1$ sauf peut-être en 0. En dérivant, on obtient que la loi en question a comme densité :
$$x \exp(-x^2/2)\ 1_{x>0}\ dx.$$

## PARTIE 2

**Exercice 3 Loi log-normale**

On dit que $X$ suit une loi log-normale standard si $Y = \ln X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On rappelle que loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, donnée par

$$x \mapsto \frac{\exp(-\frac{x^2}{2})}{\sqrt{2\pi}}.$$

1. Exprimer la fonction de répartition d'une loi log-normale standard $X$ à l'aide de la fonction de répartition $F$ de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Calculer la densité de $X$.
3. Démontrer que $X$ admet une espérance et calculer-là. On pourra utiliser (sans la démontrer) cette formule
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

**Correction 3**

1. Notons $F_X$ la fonction de répartition de $X$. Clairement, pour $t \leq 0$, $F_x(t) = 0$. Pour $t > 0$ :
$$F_x(t) = P(X \leq t) = P(\ln X \leq \ln t) = F(\ln t).$$
2. D'après la question précédente (en regardant la limite de $F(\ln t)$ quant $t$ tend vers 0 qui vaut bien 0), $F_X$ est continue. De plus, $F_X$ est $C^1$, sauf éventuellement en 0. On peut donc dériver et obtenir :
$$dP_X(t) = \frac{F'(\ln(t)}{t} 1_{t>0} dt = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln(t))^2/2}\ 1_{t>0} dt.$$
3. On calcule l'espérance d'une variable aléatoire positive donc le calcul a un sens :
$$EX = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln(t))^2/2}\ t\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{\ln t/2}}\ dt.$$
On fait le changement de variables $t = e^s$ :
$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s-s^2/2}\ ds = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s-1)^2/2}\ ds.$$
On fait le changement de variables $u = s - 1$ et on utilise l'indication :
$$EX = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\ du = \sqrt{e}.$$

**Exercice 4 Variable aléatoire sans mémoire**

On dit qu'une variable aléatoire $T$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ est sans mémoire si elle vérifie, pour tous $s, t > 0$,

$$P(T > t + s) = P(T > t)P(T > s).$$

1. Montrer qu'une variable aléatoire $T$ de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire dont la densité est donnée par $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ est une variable aléatoire sans mémoire.
2. Réciproquement, soit $T$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ sans mémoire et vérifiant $P(T > 0) > 0$.
   (a) On suppose qu'il existe $t > 0$ tel que $P(T > t) = 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $P(T > t/n)$ en fonction de $P(T > t)$. En déduire que $P(T > 0) = 0$.
   (b) Vu la question précédente, que pouvez-vous dire sur $P(T > 1)$ ?
   (c) Soit $\alpha = P(T > 1)$, on admet que $\alpha < 1$. On souhaite démontrer que $P(T > t) = \alpha^t$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$.
      i. Démontrer ce résultat si $t \in \mathbf{N}^*$.
      ii. On suppose $t \in \mathbf{Q}_+^*$ et on note $t = p/q$. Démontrer que
      $$P(T > p) = \big(P(T > p/q)\big)^q.$$
      En déduire que, pour tout $t \in \mathbf{Q}_+^*$, on a $P(T > t) = \alpha^t$.
      iii. Montrer que $x \mapsto P(T > x)$ est continue à droite sur $\mathbf{R}^+$.
      iv. En déduire que le résultat est vrai pour tout $t \in \mathbf{R}_+$.
   (d) Conclure.
3. Justifier le terme "sans mémoire". On pourra pour cela calculer $P(T > s + t | T > s)$.

**Correction 4** 1. On a bien (calcul standard, juste en intégrant les exponentielles) :

$$P(T > t + s) = e^{-\lambda(t+s)} = e^{-\lambda t}e^{-\lambda s} = P(T > t)P(T > s)$$

2. (a) Par hypothèse (en itérant $n$ fois), on a $P(T > t) = (P(T > t/n))^n$,
donc $P(T > t/n) = (P(T > t))^{1/n}$.
Comme $]0, +\infty[$ est l'union croissante des intervalles $]t/n, +\infty[$, on a bien

$$P(T > 0) = \lim_{n\to+\infty} P(T > t/n) = 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

(b) D'après la question précédente, pour tout $t > 0$ (et en particulier pour $t = 1$), on a $P(T > t) > 0$.

(c) i. On fait comme dans la question $2(a)$.

ii. Encore une fois, on raisonne comme dans la question $2(a)$, puis on utilise que $P(T > p) = a^p$ pour avoir que $P(T > p/q) = a^{p/q}$.

iii. Il s'agit de la fonction $t \mapsto 1 - F_T(t)$, où $F_T$ est la fonction de répartition de $T$ : elle est continue à droite car différence de deux fonctions continues à droite.

iv. N'importe quel nombre réel positif peut être approximé supérieurement par une suite de rationnels. On a donc par la question précédente le résultat vrai pour tout $t \geq 0$.

(d) On a donc la fonction de répartition de $T$ qui vaut 0 si $t \leq 0$ et $1 - e^{-t\ln(\alpha)}$ si $t > 0$ (on rappelle qu'on a supposé $0 < \alpha < 1$). On reconnaît (en dérivant si nécessaire) la loi exponentielle de paramètre $-\ln(\alpha)$.

3. Par hypothèse, on a pour tout $s, t > 0$, $P(T > s + t|T > s) = P(T > t)$. En d'autres mots, si l'on sait que $T$ a dépassé $s$, sa probabilité de dépasser $s + t$ ne dépend pas de $t$ : on n'a pas de mémoire du fait qu'on a dépassé $t$.