Université Claude Bernard | Licence de Mathématiques
Année universitaire 2023 – 2024 | PROBABILITÉS

Partiel du 6 mars 2023 - Durée : 2 heures

Les téléphones et les objets connectés et les documents sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées et la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Une loi peut être donnée par la mesure-image, les probas atomiques ou la densité.

Rendez les 2 parties dans la copie séparées : chacune est corrigée par un correcteur différent. De plus, afin de faciliter la correction, faites les exos dans l'ordre SVP, quitte à laisser des blancs et revenir dessus ultérieurement.

PARTIE 1

Exercice 1 Partie entière d'une loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1 (c'est-à-dire, dont la densité est donnée par $f(t) = \exp(-t)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)$, $t \in \mathbf{R}$).

On note $Y = \lceil X \rceil$ sa partie entière "supérieure", c'est-à-dire que $\lceil 1.5 \rceil = 2$ et $\lceil 3 \rceil = 3$.

1. Calculer la loi de Y.
2. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0,1]$, calculer $P(Y - X \leq t,\ Y = k)$.
3. En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = Y - X$.
4. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et calculer sa densité.

Exercice 2 Une suite de variables aléatoires

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x) n^2 x \exp(-n^2 x^2/2).$$

1. Montrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout entier $n \geq 1$, X_n admet pour densité f_n. Démontrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers 0.
3. Converge-t-elle dans l'espace L^2 ? *On rappelle qu'une suite de variables aléatoires (Y_n) converge vers Z dans L^2 si* $\lim_{n\to\infty} E[(Y_n - Z)^2] = 0$.
4. Montrer que $(nX_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers une variable que l'on identifiera par sa densité.

TOURNEZ LA PAGE SVP.

PARTIE 2

Exercice 3 Loi log-normale

On dit que X suit une loi log-normale standard si $Y = \ln X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On rappelle que loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, donnée par

$$x \mapsto \frac{\exp(-\frac{x^2}{2})}{\sqrt{2\pi}}.$$

1. Exprimer la fonction de répartition d'une loi log-normale standard X à l'aide de la fonction de répartition F de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Calculer la densité de X.
3. Démontrer que X admet une espérance et calculer-là. On pourra utiliser (sans la démontrer) cette formule classique
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Exercice 4 Variable aléatoire sans mémoire

On dit qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ est sans mémoire si elle vérifie, pour tous $s, t > 0$,

$$P(T > t + s) = P(T > t)P(T > s).$$

1. Montrer qu'une variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire dont la densité est donnée par $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ est une variable aléatoire sans mémoire.
2. Réciproquement, soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ sans mémoire et vérifiant $P(T > 0) > 0$.
   (a) On suppose qu'il existe $t > 0$ tel que $P(T > t) = 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $P(T > t/n)$ en fonction de $P(T > t)$. En déduire que $P(T > 0) = 0$.
   (b) Vu la question précédente, que pouvez-vous dire sur $P(T > 1)$?
   (c) Soit $\alpha = P(T > 1)$, on admet que $\alpha < 1$. On souhaite démontrer que $P(T > t) = \alpha^t$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$.
      i. Démontrer ce résultat si $t \in \mathbf{N}^*$.
      ii. On suppose $t \in \mathbf{Q}_+^*$ et on note $t = p/q$. Démontrer que
      $$P(T > p) = \big(P(T > p/q)\big)^q.$$
      En déduire que, pour tout $t \in \mathbf{Q}_+^*$, on a $P(T > t) = \alpha^t$.
      iii. Montrer que $x \mapsto P(T > x)$ est continue à droite sur $\mathbf{R}^+$.
      iv. En déduire que le résultat est vrai pour tout $t \in \mathbf{R}_+$.
   (d) Conclure.
3. Justifier le terme "sans mémoire". On pourra pour cela calculer $P(T > s + t | T > s)$.