

**FEUILLE DE TD 8**  
Vecteurs Gaussiens

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ .

**Exercice 1.**

Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Montrer que  $X + Y$  et  $X - Y$  sont indépendantes.

**Exercice 2.**

Soit  $(X, Y, Z)$  un vecteur gaussien *centré* dans  $\mathbb{R}^3$  de matrice de covariances

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

1. Donner la loi de  $X^2$ .
2. Pour tout  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ , donner la loi de la variable  $T = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$ . On donnera également l'espérance et la variance de  $T$ .
3. Le vecteur  $(X, Y, Z)$  admet-il une densité? Si oui la calculer.

**Exercice 3.**

Soit  $(X, Y, Z)$  un vecteur gaussien d'espérance  $(1, 0, 1)$  et de variance

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi du vecteur  $U := (X + Y, X + Z)$ .
2. Trouver une matrice  $A$  telle que les composantes du vecteur  $AU$  soient indépendantes.

**Exercice 4.**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes *réduites centrées*, c'est-à-dire de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Soient aussi  $m \in \mathbb{R}^2$  et  $\Sigma \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une matrice  $M$  et un vecteur  $V$  tel que

$$M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + V$$

suivent une loi  $\mathcal{N}(m, \Sigma)$ .