

FEUILLE DE TD 7

Convergence en loi, Fonction caractéristique, Théorème de Lévy, TCL

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Exercice 1. Fonctions caractéristiques

Calculer les fonctions caractéristiques des lois suivantes :

1. loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$;
2. loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$;
3. loi de XY , où X est une variable exponentielle de paramètre 1, Y une variable de Bernoulli de paramètre $1/2$, et X, Y sont indépendantes.

Exercice 2. Fonctions caractéristiques - Encore ! Calculer les fonctions caractéristiques de

1. la loi $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$;
2. la loi de densité $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Exercice 3. Fonction caractéristique de la loi normale

1. Soit X de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On note ϕ_{m, σ^2} la fonction caractéristique de X .
 - (a) Montrer que $\phi_{m, \sigma^2}(t) = e^{itm} \phi_{0,1}(\sigma t)$.
 - (b) Montrer que $\phi := \phi_{0,1}$ satisfait l'équation différentielle $\phi'(t) + t\phi(t) = 0$ sur \mathbb{R} .
 - (c) Dédurre des questions précédentes que $\phi_{m, \sigma^2}(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.
 - (d) Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m', (\sigma')^2)$ deux variables indépendantes. Calculer la loi de $X + Y$.
2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi Normale $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$. Si $X_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, montrer que $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2$.

Exercice 4. Loi géométrique (?) et loi exponentielle

Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geq \lambda$, on prend $(X_{n,i})_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$. On considère alors la variable aléatoire

$$N_n := \frac{1}{n} \inf\{i \geq 1 : X_{n,i} = 1\}.$$

1. Dans quel ensemble N_n prend-elle ses valeurs ? Quelle est sa loi ?
2. Montrer que N_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ .

Exercice 5.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ où

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} X_k$$

vers une loi qu'on explicitera.

Exercice 6.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. Soit $\mathbf{P}_{X_1} = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$.

1. On pose

$$S_n := \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}.$$

Calculer sa fonction caractéristique.

2. Calculer la fonction caractéristique de S qui suit la loi uniforme dans $[-1, 1]$.
3. Montrer que (S_n) converge en loi vers S . Ce résultat vous semble-t-il intuitif?
Indication : $\sin(t) = 2 \sin(t/2) \cos(t/2) = \dots = 2^n \sin(t/2^n) \prod_{k=1}^n \cos(t/2^k)$.

Exercice 7. TCL et un calcul de limite

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et donner une expression de $\mathbf{P}(S_n \leq n)$.
2. On pose $Z_n = \frac{S_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}}$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une v.a. dont on précisera la loi.
3. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Indication : On pourra réécrire $e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$ comme la probabilité d'un événement portant sur S_n avec $\lambda = 1$, et utiliser le résultat de la question 2.