Feuille de TD 5

Convergence en probabilité, presque sûre, Lemmes de Borel-Cantelli,
Loi des grands nombres

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Exercice 1. Lemme de Borel-Cantelli - Convergence p.s.

On rappelle que si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$, alors

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Soit X_n, $n \geq 1$ une suite de variables aléatoires réelles. La suite X_n converge presque sûrement (p.s. ou $\mathbf{P}$-p.s.) vers une v.a. X si

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega; X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

1. Montrer que si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$, les deux événements $\limsup_n A_n$ et $\{$une infinité des A_n est réalisée$\}$ sont égaux.
2. Supposons que les v.a. X_n, $n \geq 1$ sont indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et
$$\mathbf{P}(X_n = 1) = p_n = 1 - \mathbf{P}(X_n = 0).$$
   (a) Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 si et seulement si $p_n \to 0$.
   (b) Montrer que
$$\left\{X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\} = \left(\limsup_n \{X_n = 1\}\right)^c.$$
   (c) Montrer que X_n converge p.s. vers 0 si et seulement si $\sum_n p_n < \infty$.
3. Montrer que $X_n \to +\infty$ p.s. si et seulement si
$$\forall M > 0,\ \mathbf{P}(\limsup_n \{X_n < M\}) = 0.$$

Exercice 2.

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $n \geq 1$, on définit les événements $A_n = \{U \leq \frac{1}{n}\}$.

1. Calculer $\mathbf{P}(A_n)$ et déterminer l'ensemble $\limsup_n A_n$.
2. En déduire un contre-exemple du second lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 3. Loi des grands nombres

Déterminer, sans calcul, les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f(\frac{x_1+...+x_n}{n}) dx_1...dx_n$ pour f une fonction continue sur $[0, 1]$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ pour f une fonction continue sur $[0, 1]$ et $p \in [0, 1]$.

Exercice 4.

Montrer que, dans une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie identique non biaisée, la séquence PFP (**P**ile, **F**ace) apparaît une infinité de fois. À l'aide de la loi faible des grands nombres, donner la fréquence d'apparition de cette séquence (on pourra rassembler les variables en paquets de variables indépendantes).

Exercice 5.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles. On suppose que X_n converge en probabilité vers X, et Y_n converge en probabilité vers Y.

1. Montrer que si de plus
$$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y,$$
alors $X = Y$ $\mathbf{P}$-p.s.
2. Montrer que
$$X_n \pm Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X \pm Y.$$
3. (*) Montrer que
$$X_n Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} XY.$$

Exercice 6. (*) **LGN faible pour une suite de v.a. dépendantes**

Étant donné une suite de variables aléatoires $X_1,\ X_2,\ \cdots, X_n, \cdots$, supposons que
$$\mathbf{E}[X_n] = 0 \text{ et } \mathbf{E}[X_n X_m] = f(n-m), \forall 1 \leq m \leq n,$$
où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée telle que $f(k) \to 0$ lorsque $k \to \infty$. Montrer que
$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Exercice 7. Loi des grands nombres et Borel-Cantelli

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles positives, i.i.d.

1. Si $0 < \mathbf{E}[X_1] < \infty$, montrer que $\mathbf{P}$-p.s.,
$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty.$$
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$,
$$\mathbf{E}[X_1] < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(X_n \geq \alpha n) < \infty.$$
En déduire que $\mathbf{P}$-p.s.,
$$\limsup_n \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mathbf{E}[X_1] < \infty. \\ \infty & \text{si} \quad \mathbf{E}[X_1] = \infty. \end{cases}$$

Exercice 8. (*)

Soit $X_n, n \geq 1$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que p.s.,
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1.$$
2. On pose $Z_n = \frac{\max(X_1, \cdots, X_n)}{\log n}$ pour tout $n \geq 2$, montrer que
$$\liminf_{n\to\infty} Z_n \geq 1, \text{ p.s.}$$
3. ($*$) Montrer que pour une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ bien choisie, $\limsup_{k\to\infty} Z_{n_k} \leq 1$ p.s. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty} Z_n = 1, \text{p.s.}$$

Exercice 9.

1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables iid de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner la loi de $X_1 + \ldots + X_n$.
2. Déterminer sans calcul $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f(\frac{k}{n})$ pour f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$.