Université Claude Bernard — Licence de Mathématiques, L3
PROBABILITÉS

Feuille de TD 4

Fonction de répartition, lois usuelles

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Exercice 1. Espérance et queue de la distribution Soit Z une variable aléatoire positive.

Montrer que Z (resp. Z^2) est intégrable si l'intégrale de gauche (resp. de droite) converge dans les égalités ci-dessous, en démontrant ces égalités :

$$\mathbf{E}(Z) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(Z \geq t)\, dt \qquad \text{et } \mathbf{E}(Z^2) = 2\int_0^{+\infty} t\mathbf{P}(Z \geq t)\, dt.$$

Exercice 2. Loi exponentielle

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbf{P}_X(dx) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x)dx,\ \mathbf{P}_Y(dy) = \mu e^{-\mu y} 1_{\mathbb{R}_+}(y)dy,$$

avec $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

1. Calculer leurs fonctions de répartition F_X et F_Y.
2. Déterminer la loi de $Z := \min\{X, Y\}$.
3. Calculer $\mathbf{P}(Z = X)$.
4. Déterminer la loi de $S := X + Y$. *On pourra utilement traiter différemment les cas $\lambda = \mu$ et $\lambda \neq \mu$.*

Exercice 3. Lois géométriques

Soient X, Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathrm{Geom}(p)$, $Y \sim \mathrm{Geom}(p')$, $p, p' \in]0, 1[$.

1. Calculer la loi de $\min(X, Y)$.
2. Cela vous rappelle-t-il une autre famille de variables aléatoires ?

Exercice 4. Loi de Paréto Etant donné un réel $a > 0$, on dit que X suit une loi de Paréto de paramètre a si $X = \exp(Z)$ où Z suit une loi exponentielle de paramètre a.

1. (a) Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{t^a} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

   (b) En déduire que X admet une densité de probabilité f_X et en donner une expression.
2. Soit Y une v.a. de même loi que X et indépendante de X. Donner la loi de $V = XY$.

Exercice 5. Loi de Paréto - bis On considère X, Y deux v.a. indépendantes de loi de Paréto de paramètre $a > 0$ (comme dans l'exercice ci-dessus).

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$
   (a) Donner la condition nécessaire et suffisante sur a assurant que X admette un moment d'ordre k (rappel : on dit que X admet un moment d'ordre k si $|X|^k$ est intégrable).
   (b) Sous cette condition, calculer ce moment d'ordre k (c'est-à-dire $\mathbb{E}[X^k]$).

2. Démontrer que la variable aléatoire $W = \min(X, Y)$ suit encore une loi de Paréto dont on déterminera le paramètre.

Exercice 6. Loi de Weibull, Loi de Gumbel

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire de loi

$$\mathbf{P}_X(\mathrm{d}x) = \frac{2}{\lambda^2}\, x\, e^{-(x/\lambda)^2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathrm{d}x.$$

On l'appelle la loi de Weibull de paramètre $(2, \lambda)$.

1. Calculer sa fonction de répartition F_X. En déduire la probabilité $\mathbf{P}(X^2 \leq 1)$.
2. Expliciter la loi de $Y = X^2$.
3. Expliciter la loi de $Z = -\log(X)$.

Exercice 7.

Soit Z une variable aléatoire vérifiant pour tout $x \geq 1$, $\mathbf{P}(Z > x) = \mathbf{P}(Z < -x)$ et $\mathbf{P}(|Z| > x) = x^{-2}$. Déterminer la fonction de répartition de Z.

Exercice 8.

Soit X une v.a. intégrable.

1. Montrer que $\mathbf{E}\left(|X|\mathbf{1}_{|X|>M}\right)$ tend vers 0 quand $M \to +\infty$.
2. Soit (Λ_n) une famille d'événements tels que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\Lambda_n) = 0.$$

   (a) Peut-on dire que la suite de variables aléatoires $(\mathbf{1}_{\Lambda_n})_n$ converge vers 0 en probabilité ? Dans L^p ? Presque sûrement ?

   (b) Montrer que, pour tout $M > 0$ fixé, la limite de $\mathbf{E}\left(|X|\ \mathbf{1}_{\Lambda_n}\ \mathbf{1}_{|X|\leq M}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$, est nulle.

   (c) En déduire que $\mathbf{E}(|X|\mathbf{1}_{\Lambda_n})$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9. Loi exponentielle–encore

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X_1, X_2, \ldots$ une suite i.i.d. de loi $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

1. Calculer la loi de $\lfloor X_1 \rfloor$.
2. Calculer la loi de $\max\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$.
3. Calculer la loi de $\min\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$.
4. Montrer que la suite de variables aléatoires $(\min_{i\leq n}(X_i))_n$ converge en probabilité vers 0.
5. En utilisant la monotonie de la suite $(\min_{i\leq n}(X_i))_n$, montrer que cette convergence a également lieu presque sûrement.