

FEUILLE DE TD 2
Indépendance

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1. Indépendance 2 à 2, indépendance mutuelle

Soient $X, Y, Z : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de lois

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_Z = (1/2)\delta_0 + (1/2)\delta_1.$$

Soit

$$A_1 := \{Y = Z\}, A_2 := \{Z = X\}, A_3 := \{X = Y\}.$$

1. Montrer que A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que A_1, A_2, A_3 ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 2. Indépendance des complémentaires

1. Soient A_1 et A_2 des événements. Montrer que A_1 et A_2 sont indépendants ssi A_1^c et A_2^c sont indépendants.
2. Soient A_1, A_2, A_3 des événements. Montrer que A_1, A_2, A_3 sont indépendants ssi A_1^c, A_2^c, A_3^c sont indépendants.
3. (*) Soient A_1, \dots, A_n des événements. Montrer que A_1, \dots, A_n sont indépendants ssi A_1^c, \dots, A_n^c sont indépendants.

Exercice 3. Stabilité par somme

Soient X, Y deux v.a. indépendantes. Donner la loi de $X + Y$ dans les cas suivants.

1. $X \sim \text{Bin}(n, p), Y \sim \text{Bin}(m, p)$, avec $n, m \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$
2. $X \sim \text{Poisson}(\lambda), Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$,

Exercice 4. Indépendance et covariance

Soit $U : \Omega \rightarrow [0, 1]$ une variable aléatoire de loi uniforme. On pose

$$X = -\mathbf{1}_{[0, 1/4[}(U) + \mathbf{1}_{[1/4, 1/2[}(U), \quad X' = -\mathbf{1}_{[1/2, 3/4[}(U) + \mathbf{1}_{[3/4, 1]}(U) \text{ et } A = \{X = X'\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$, puis que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X'}$.
2. Établir que $\mathbb{E}[XX'] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X']$.
3. Montrer que les variables aléatoires X et X' ne sont pas indépendantes.

Exercice 5. Loi d'un couple de v.a.

1. Soient X, Y, X', Y' des v.a. telles que $(X, Y) \stackrel{\text{loi}}{=} (X', Y')$. Est-il vrai que $X \stackrel{\text{loi}}{=} X'$ et $Y \stackrel{\text{loi}}{=} Y'$? Que pensez-vous de la réciproque?
2. Donner toutes les lois possibles d'un couple de v.a. (X, Y) tel que X et Y sont des variables de loi de Bernoulli(1/2).

Exercice 6.

Soit X une v.a. réelle indépendante d'elle-même. On va démontrer qu'elle est une constante \mathbb{P} -p.s.

1. Soit $I_n = [n, n + 1[$. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\mathbb{P}(X \in I_n) = 1.$$

En déduire que $\mathbb{E}[X]$ existe.

2. Soit $m = \mathbb{E}[X]$, montrer que

$$\mathbb{E}[(X - m)^2] = 0.$$

3. Conclure que $X = m$ \mathbb{P} -p.s.

Exercice 7.

Soient X, Y deux v.a. indépendantes. Soit $p > 0$ un réel donné, $a \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que, pour tous réels x et y , on a $|x + y|^p \leq 2^p (|x|^p + |y|^p)$. *On pourra commencer par considérer le cas $|x| \geq |y|$.*
2. Montrer l'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}[|X|^p] < \infty \iff \mathbb{E}[|X - a|^p] < \infty.$$

3. (*) Si $\mathbb{E}[|X + Y|^p] < \infty$, en déduire, à l'aide du théorème de Fubini, que

$$\mathbb{E}[|X|^p] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[|Y|^p] < \infty.$$