

**FEUILLE DE TD 2**  
Indépendance

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Exercice 1. Indépendance 2 à 2, indépendance mutuelle**

Soient  $X, Y, Z : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de lois

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_Z = (1/2)\delta_0 + (1/2)\delta_1.$$

Soit

$$A_1 := \{Y = Z\}, \quad A_2 := \{Z = X\}, \quad A_3 := \{X = Y\}.$$

1. Montrer que  $A_1, A_2, A_3$  sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que  $A_1, A_2, A_3$  ne sont pas mutuellement indépendants.

**Exercice 2. Indépendance des complémentaires**

1. Soient  $A_1$  et  $A_2$  des événements. Montrer que  $A_1$  et  $A_2$  sont indépendants ssi  $A_1^c$  et  $A_2^c$  sont indépendants.
2. Soient  $A_1, A_2, A_3$  des événements. Montrer que  $A_1, A_2, A_3$  sont indépendants ssi  $A_1^c, A_2^c, A_3^c$  sont indépendants.
3. (\*) Soient  $A_1, \dots, A_n$  des événements. Montrer que  $A_1, \dots, A_n$  sont indépendants ssi  $A_1^c, \dots, A_n^c$  sont indépendants.

**Exercice 3. Stabilité par somme**

Soient  $X, Y$  deux v.a. indépendantes. Donner la loi de  $X + Y$  dans les cas suivants.

1.  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ,  $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ , avec  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $p \in [0, 1]$
2.  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ ,

**Exercice 4. Indépendance et covariance**

Soit  $U : \Omega \rightarrow [0, 1]$  une variable aléatoire de loi uniforme. On pose

$$X = -\mathbf{1}_{[0,1/4]}(U) + \mathbf{1}_{[1/4,1/2]}(U), \quad X' = -\mathbf{1}_{[1/2,3/4]}(U) + \mathbf{1}_{[3/4,1]}(U) \text{ et } A = \{X = X'\}.$$

1. Montrer que  $\mathbb{P}(A) = 0$ , puis que  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X'}$ .
2. Établir que  $\mathbb{E}[XX'] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X']$ .
3. Montrer que les variables aléatoires  $X$  et  $X'$  ne sont pas indépendantes.

**Exercice 5. Loi d'un couple de v.a.**

1. Soient  $X, Y, X', Y'$  des v.a. telles que  $(X, Y) \stackrel{\text{loi}}{=} (X', Y')$ . Est-il vrai que  $X \stackrel{\text{loi}}{=} X'$  et  $Y \stackrel{\text{loi}}{=} Y'$ ? Que pensez-vous de la réciproque?
2. Donner toutes les lois possibles d'un couple de v.a.  $(X, Y)$  tel que  $X$  et  $Y$  sont des variables de loi de Bernoulli( $1/2$ ).

**Exercice 6.**

Soit  $X$  une v.a. réelle indépendante d'elle-même. On va démontrer qu'elle est une constante  $\mathbb{P}$ -p.s.

1. Soit  $I_n = [n, n+1]$ . Montrer qu'il existe un entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\mathbb{P}(X \in I_n) = 1.$$

En déduire que  $\mathbb{E}[X]$  existe.

2. Soit  $m = \mathbb{E}[X]$ , montrer que

$$\mathbb{E}[(X - m)^2] = 0.$$

3. Conclure que  $X = m$   $\mathbb{P}$ -p.s.

**Exercice 7.**

Soient  $X, Y$  deux v.a. indépendantes. Soit  $p > 0$  un réel donné,  $a \in \mathbb{R}$ .

1. Justifier que, pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a  $|x + y|^p \leq 2^p (|x|^p + |y|^p)$ . *On pourra commencer par considérer le cas  $|x| \geq |y|$ .*
2. Montrer l'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}[|X|^p] < \infty \iff \mathbb{E}[|X - a|^p] < \infty.$$

3. (\*) Si  $\mathbb{E}[|X + Y|^p] < \infty$ , en déduire, à l'aide du théorème de Fubini, que

$$\mathbb{E}[|X|^p] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[|Y|^p] < \infty.$$