Examen, 6 Mai 2024, durée 2h

Les téléphones, les objets connectés et les documents sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées et la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Une loi peut être donnée par la mesure-image, les probas atomiques ou la densité.

Attention!! Rendez les 2 parties dans deux copies séparées: chacune est corrigée par un correcteur différent !!

PARTIE 1

Exercice 1. — Questions de cours

1. Rappeler l'énoncé de la loi forte des grands nombres.
2. Rappeler l'énoncé du TCL (théorème central limite).
3. Est-ce qu'un processus de Galton-Watson dont la mesure de reproduction μ est donnée par $\mu = \frac{2}{3}\delta_0 + \frac{1}{6}\delta_2 + \frac{1}{6}\delta_4$ a une chance de survivre indéfiniment ? Justifier.

Exercice 2. —

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d vérifiant $\mathbb{P}\big[X_n = 1\big] = \mathbb{P}\big[X_n = 0\big] = 1/2$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$Y_n := X_n + X_{n+1}$$

1. Les v.a $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont-elles identiquement distribuées ? Justifier.
2. Pour $n \geq 1$, déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
3. Les v.a. $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont-elles indépendantes ? Justifier.
4. Les v.a. $(Y_{2n})_{n\geq 1}$ sont-elles indépendantes ? Justifier.
5. Montrer que la suite $\left(\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une v.a. à préciser.

Exercice 3. — Loi de Poisson

On rappelle que si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$ (on notera $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) alors $\mathbb{P}\big[X = 0\big] = e^{-\lambda}$ et pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{P}\big[X = k\big] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

1. Calculer la fonction caractéristique d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. En déduire que si X et Y sont indépendantes et respectivement de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ ($\lambda \geq 0, \mu \geq 0$), alors $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
3. En utilisant la question précédente, montrer que si $\lambda_1 \leq \lambda_2$, et si $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1), X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\big[X_1 \geq n\big] \leq \mathbb{P}\big[X_2 \geq n\big]$$

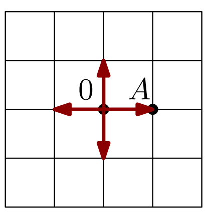
PARTIE 2 (!! Rappel : sur une copie différente !!)

Exercice 4. — Une propriété qui caractérise la Gaussienne

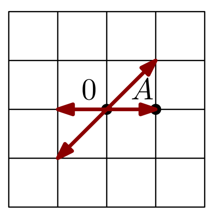
Soient X, Y deux variables aléatoires i.i.d L^2 ayant la propriété que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ a même loi que X. On pose $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$.

1. Vérifier que la loi Gaussien $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ a la propriété requise. Le but de l'exercice est de montrer que c'est la seule loi ayant cette propriété.
2. Montrer que $\mathbb{E}\big[X\big] = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $X_1, \ldots, X_{2^n}$ sont des variables aléatoires i.i.d de même loi que X alors, la variable aléatoire
$$\frac{1}{2^{n/2}}(X_1 + \ldots + X_{2^n})$$
a même loi que X.
4. Conclure.

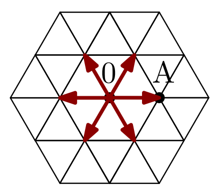
Exercice 5. — Marches aléatoires sur des réseaux du plan



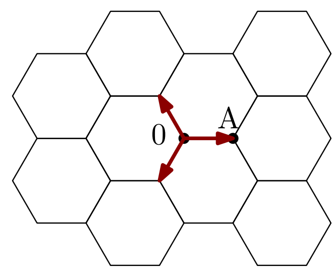
marche a)



marche b)



marche c)



marche d)

On considère 4 marches aléatoires dans $\mathbb{R}^2$ qui partent de l'origine $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Pour les 3 premières, les marches a), b) et c), elles sont de la forme $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ où les $(X_i)_{i \geq 1}$ sont des variables aléatoires i.i.d dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi est la mesure uniforme sur les vecteurs issus de l'origine et dessinés sur le graphique ci-dessus. Pour fixer l'échelle, le point A correspond à chaque fois au point $(1,0)$. Par exemple, la marche aléatoire à gauche (le cas a)) correspond à la marche aléatoire dont les incréments i.i.d X_i ont loi $\mu_a = \frac{1}{4}(\delta_{(1,0)} + \delta_{(0,1)} + \delta_{(-1,0)} + \delta_{(0,-1)})$. La dernière marche (d) est expliquée dans la dernière question.

1. Rappeler quelle est la définition d'un vecteur Gaussien $Y = (Y_1, \ldots, Y_k)$.
2. Dans l'exemple de gauche a), vers quoi converge le vecteur aléatoire $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$?
3. Traiter l'exemple b) et la limite correspondante pour $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$. On commencera par expliciter la loi des incréments μ_b puis la matrice de covariance de $X_1 \sim \mu_b$.
4. Traiter l'exemple c) et la limite correspondante pour $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$. (Cette marche est appelée marche aléatoire sur le *réseau triangulaire*).
5. La dernière marche est une marche au hasard sur le *réseau hexagonal*. S_0 part de l'origine 0 et choisit l'un des trois sommets les plus proches (voir figure d)) avec proba $1/3, 1/3, 1/3$. Ce nouveau sommet est S_1. Pour le deuxième pas de la marche, on choisit à nouveau l'un des 3 sommets les plus proches uniformément au hasard, ce qui nous conduit à S_2 et ainsi de suite. Vérifier que $\mathbb{P}\big[S_2 = 0\big] = \frac{1}{3}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on peut écrire $S_{2n} = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2 + \ldots + X_n + Y_n$ où les X_i et Y_i sont des suites de variables i.i.d de loi différente. En déduire une limite pour le vecteur aléatoire $S_n / \sqrt{n}$.