CORRECTION PARTIE 2 DEVOIR 13/3/24.

III 1/ $X_n \xrightarrow{n\to+\infty} X$ p.s. $\iff \mathbb{P}(X_n \xrightarrow{n\to+\infty} X) = 1$

2/ $X_n \to X$ en probabilité

$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$

3/ Par l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \int_\Omega \mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}(|X_n - X|)$$

donc par le théorème des gendarmes $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$

IV 1/ $X = 0 \iff X' \neq 0$ donc $\mathbb{P}(X = X') \neq 0.$

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X'} = \frac{1}{4}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_1.$$

2/ $XX' = 0$ p.s. donc $\mathbb{E}\, XX' = 0$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X' = \frac{1}{4}\times(-1) + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1 = 0.$$

3/ Par exemple :

$$\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(X'=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \neq 0 = \mathbb{P}(X=0 \cap X'=0).$$

CORRECTION PARTIE 2 DEVOIR 13/3/24 (5417F)

Ⅴ 1/ $\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ = (en intégrant par parties)

$[x\cdot(-e^{-x})]_{x=0}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1\cdot(-e^{-x})dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_{x=0}^{+\infty} = 1.$

2/ Soit $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$. $\mathbb{E}\varphi\left(\frac{X}{\lambda}\right) = \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-x} dx$

$\overset{y=x/\lambda}{=} \int_0^{+\infty} \varphi(y)\, \lambda e^{-\lambda y} dy$ donc $\frac{X}{\lambda}$ de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

3/ De même: $\mathbb{E}\varphi(X^2) = \int_0^{+\infty} \varphi(x^2) e^{-x} dx \overset{\boxed{y=x^2}}{=}$

$\int_0^{\infty} \varphi(y) e^{-\sqrt{y}} d(\sqrt{y})$ donc loi $(Y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbb{1}_{y\geq 0} e^{-\sqrt{y}} dy.$

4/ De même: $\mathbb{E}\varphi(e^{aX}) \overset{y=e^{aX}}{=} \int_1^{+\infty} \varphi(y)\, y^{-1/a} d\left(\frac{\ln y}{a}\right)$

$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{a} \frac{\varphi(y)}{y^{1+1/a}} dy$ donc Loi$(Y) = \frac{1}{a\, y^{1+1/a}} \mathbb{1}_{y\geq 1} dy.$

$Z_a \geq 0$: calculons $\mathbb{E}Z_a$. $\mathbb{E}Z_a = \frac{1}{a}\int_1^{+\infty} \frac{y}{y^{1+1/a}} dy$

$\boxed{\text{Riemann}}$ $Z_a \in L^1 \iff 1/a > 1 \iff a < 1.$