Correction de la partie I

Exercice 1

1. $P(X \text{ soit impair}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = 2k+1)$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} pq^{2k+1} = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}.$$

2. Si X est pair alors $Y = 0$ car $\sin\left(\frac{\pi X}{2}\right) = 0$

Si X est impair alors $\left|\sin\left(\frac{\pi X}{2}\right)\right| = 1$ et $\frac{X-1}{2} \in \mathbb{N}$.

Ainsi Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

3. $P(Y=0) = P(X \text{ est pair}) + P(X=1)$

$$= 1 - P(X \text{ est impair}) + P(X=1)$$

$$= 1 - \frac{q}{1+q} + pq = \frac{1+q-q^3}{1+q}.$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y=n) = P(X=2n+1) = pq^{2n+1}$.

On a alors la loi de Y. On vérifie que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(Y=n) = 1.$$

4. $E(Y) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n\, pq^{2n+1} = pq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n(q^2)^n.$

On sait que $\forall x \in]-1,1[$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc

$\forall x \in]-1,1[$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$

Ainsi $E(Y) = \dfrac{\cancel{\ }\, p q^3}{(1-q^2)^2}$.

$\boxed{\text{Exercice } 2}$

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{Z_n}(t) = P(Z_n \leq t)$
$= \left(F_{X_1}(t)\right)^n$ où

on a utilisé que les v.a. sont indépendantes et identiquement distribuées.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ t^n \text{ si } t \in [0,1] \\ 1 \text{ si } t \geq 0. \end{cases}$

On en déduit donc que la densité de Z_n est donnée par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Z_n}(t) = n t^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.

2. $\forall \varepsilon \in]0,1[, \quad P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) = P(1 - Z_n \geq \varepsilon)$

car $Z_n \in [0,1]$ p.s.

Ainsi $P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) = P(Z_n \leq 1-\varepsilon)$
$= (1-\varepsilon)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $|1-\varepsilon| < 1$.

Donc $Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ en probabilité.

3. La suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée par 1.

Donc $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers Z.

Mais la convergence presque sûre implique la convergence en proba. Ainsi par unicité de la limite de la convergence en proba (cf. TD) alors $Z = 1$.

Donc $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 1.

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$F_{Z_n^n}(t) = P(Z_n^n \leq t)$$
$$= P(Z_n \leq t^{1/n})$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

5. Ainsi on voit facilement que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_{Z_n^n}(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

6. $\forall n \geq 1$, $y, z \in \mathbb{R}$ on a.

$$P(Y_n \geq y, Z_n \leq z) = P(\forall i \in \{1, \cdots, n\}\ y \leq X_i \leq z)$$

On en déduit donc

$$P(Y_n \geq y, Z_n \leq z) = \begin{cases} (z-y)^n & \text{si } 0 \leq y \leq z \leq 1 \\ z^n & \text{si } y \leq 0 \leq z \leq 1 \\ (1-y)^n & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \leq z. \\ 1 & \text{si } 0 \leq 1 \leq y \leq z. \\ 0 & \text{si } y \leq z \leq 0. \\ 0 & \text{si } z \leq y. \end{cases}$$

7. Posons $y = z = 1/2$, alors

$P(Y_n \geq \frac{1}{2}, Z_n \leq 1/2) = 0$ mais il est facile de vérifier que $P(Y_n \geq 1/2) \neq 0$ et $P(Z_n \leq 1/2) \neq 0$.