Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2022-2023
L3 MGA
Anneaux et Corps

FEUILLE D'EXERCICES 1 : ANNEAUX ET IDÉAUX

Exercice 1. Lesquels de ces sous-ensembles de $\mathbb{C}$ sont des sous-anneaux ? Lesquels sont des corps ?

(1) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} 10^{-n}\mathbb{Z}$;
(2) $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, (m,n) = 1, p \mid n\}$ (p est un nombre premier fixé) ;
(3) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$;
(4) $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt[3]{2}$;
(5) $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{-1}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$.

Exercice 2. Les éléments inversibles d'un anneau A forment le groupe multiplicatif $(A^\times, \cdot)$.

(1) Trouver le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]^\times$ en utilisant le module complexe.
(2) Montrer que le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ est infini.

Exercice 3. Un élément a d'un anneau A est dit nilpotent, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$.

(1) Trouver tous les éléments inversibles, les diviseurs de zéro, les nilpotents des anneaux suivants :
  (a) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$;
  (b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
(2) Démontrer que, pour tout nilpotent x de A, l'élément $1 + x$ est inversible.
(3) Montrer que l'ensemble N des éléments nilpotents d'un anneau forme un idéal.

Exercice 4. Soit I et J deux idéaux de A étrangers c'est-à-dire tels que $I + J = A$.

(1) Montrer que $I \cap J = IJ$.
  On rappelle que IJ est le groupe additif engendré par les produits.
(2) Trouver deux idéaux non étrangers d'un anneau A tels que $I \cap J \neq IJ$.

Exercice 5. Montrer que les ensembles suivants sont des idéaux non principaux :

(1) $I = \{f \in A : 5 \text{ divise } f(0)\}$ où $A = \mathbb{Z}[X]$.
(2) L'idéal (X, n) où $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$.
(3) $I = \{f \in A : f(0) = 0\}$ où $A = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'anneau des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Démontrer que pour tout corps K, l'anneau des polynômes $K[x]$ a une infinité de polynômes unitaires irréductibles.

Exercice 7. Soit A un anneau intègre. Montrer que $A[x]$ est principal ssi A est un corps.

Exercice 8. (1) Soit $f(x) \in A[x]$ un polynôme sur un anneau A. Supposons que $(x-1) \mid f(x^n)$. Montrer que $(x^n - 1) \mid f(x^n)$.

(2) Pour $n, m \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $(x-2)^m + (x-1)^n - 1$ par $(x-1)(x-2)$ dans $\mathbb{Z}[x]$.

Exercice 9. (1) Si K est un corps, montrer qu'un polynôme P de degré 2 et 3 dans $K[x]$ est irréductible si et seulement si il n'a pas de zéro dans K.

(2) Trouver tous les polynômes irréductibles de degré 2, 3 à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(3) Décrire tous les polynômes irréductibles de degré 4 et 5 sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 10. (1) Trouver tous les polynômes irréductibles de degré 2, 3 à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(2) Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_3[x]$.

$$x^2 + x + 1, \qquad x^3 + x + 2, \qquad x^4 + x^3 + x + 1\ .$$

Exercice 11. En utilisant les réductions mod 2 ou mod 3 montrer que les polynômes

$$x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 5 \qquad \text{et} \qquad 7x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 24x - 455$$

sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[x]$.
En utilisant la partie précédente, montrer que les polynômes

$$5x^3 + 8x^2 + 3x + 15 \qquad \text{et} \qquad x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 6x - 5$$

sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[x]$.

Exercice 12. Soient

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) - 1, \quad g(x) = (x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2 + 1$$

où $a_1, \dots a_n \in \mathbb{Z}$ sont deux à deux distincts. Montrer que f et g sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[x]$.

Exercice 13. Soient $f, g \in \mathbb{Q}[x]$. Supposons que f soit irréductible et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$. Alors f divise g.

Exercice 14. Trouver le $\mathrm{pgcd}(x^n - 1,\ x^m - 1)$ dans $\mathbb{Z}[x]$.

Exercice 15. Trouver le $\mathrm{pgcd}(f, g)$ dans $\mathbb{Z}_2[x]$ et sa représentation linéaire $fu + gv$ où $d, u, v \in \mathbb{Z}_2[x]$:

(1)
$$f = x^5 + x^4 + 1, \qquad g = x^4 + x^2 + 1;$$

(2)
$$f = x^5 + x^3 + x + 1, \qquad g = x^4 + 1.$$

Exercice 16. Trouver le $\mathrm{pgcd}(f, g)$ dans $\mathbb{Z}_3[x]$ et $\mathbb{Z}_5[x]$ de $f = x^4 + 1$, $g = x^3 + x + 1$.

Exercice 17. Trouver le $\mathrm{pgcd}(f, g)$ dans $\mathbb{Z}[x]$ de $f = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ et $g = x^3 + x^2 - x - 1$.

Exercice 18. Soient $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ et K son corps de fractions.

(1) Montrer que $x^2 - x + 1$ n'est pas irréductible dans $K[x]$.

(2) Montrer que $x^2 - x + 1$ est irréductible dans $A[x]$.

(3) En déduire que $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ n'est pas euclidien (et même pas factoriel).

Exercice 19. Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$.

(1) On suppose que $P(0)$ et $P(1)$ sont impairs. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'aucun des entiers $P(0), \ldots, P(n-1)$ ne soit divisible par n. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 20. Montrer que f est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$ dans chacun des cas suivants :

(1) $f = x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;

(2) $f = x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;

(3) $f = x^4 - x^3 + 2x + 1$;

Exercice 21. (1) Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$. Soit $\frac{a}{b}$ une racine rationnelle : $P(\frac{a}{b}) = 0$, $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{Z}\ \ (a - bk)$ divise $P(k)$.

(2) Quelles racines rationnelles ont les polynômes $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ et $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$?

Exercice 22. (1) Soient $P \in \mathbb{Z}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, $m = P(n)$. On suppose $m \neq 0$. Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ $m \mid P(n + km)$.

(2) En déduire qu'il n'existe aucun polynôme $P \in \mathbb{Z}[x]$, non constant, tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ soit un nombre premier.

Exercice 23. Soit $(x^3 - x + 2)$ l'idéal principal engendré par $x^3 - x + 2$ dans l'anneau $\mathbb{Q}[x]$.

(1) Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - x + 2)$ est un corps.

(2) Soit y l'image de x dans $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - x + 2)$ par la surjection canonique. Calculer son inverse.

(3) Montrer que $1 + y + y^2$ est non nul et calculer son inverse.

Exercice 24. Les polynômes suivants sont-ils irréductibles ?

(1) $X^5 + 121X^4 + 1221X^3 + 12221X^2 + 122221X + 222222$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

(2) $f(X, Y) = X^2Y^3 + X^2Y^2 + Y^3 - 2XY^2 + Y^2 + X - 1$ dans $\mathbb{C}[X, Y]$ et $\mathbb{F}_2[X, Y]$.

(3) $f(X, Y) = Y^7 + Y^6 + 7Y^4 + XY^3 + 3X^2Y^2 - 5Y + X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{Q}[X, Y]$.

Exercice 25. L'idéal principal (x^2+y^2+1) est-il maximal dans les anneaux $\mathbb{C}[x, y]$, $\mathbb{R}[x, y]$, $\mathbb{Q}[x, y]$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x, y]$?

Exercice 26. Vrai ou faux ?

(1) $\mathbb{R}[X, Y]$ est un anneau euclidien.

(2) $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau principal.

(3) $\mathbb{Z}[X, Y]$ est un anneau factoriel.

(4) Un anneau factoriel est principal.

(5) Un anneau euclidien est principal.

(6) Un anneau euclidien est factoriel.

Exercice 27. Démontrer que tout morphisme non trivial d'un corps dans un anneau est injectif.

Exercice 28. Montrer que dans un anneau fini tout idéal premier est maximal.

Exercice 29. Montrer que si M est un idéal maximal de A, alors le seul idéal premier de A qui contient M^n est M.

Exercice 30.
(1) Trouver le nombre d'éléments de l'anneau quotient $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m)$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$.
(2) L'idéal principal engendré par 2 est-il premier dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$?

Exercice 31. Soit I et J deux idéaux de l'anneau A. Considérons la projection canonique π_I : $A \to A/I$ et l'image $\bar{J} = \pi_I(J)$ de l'idéal J.
(1) Montrer que $\bar{J}$ est un idéal de l'anneau quotient A/I.
(2) Démontrer qu'on a l'isomorphisme suivant : $(A/I)/\bar{J} \cong A/(I+J)$.

Exercice 32.
(1) Soit A un anneau principal, I un idéal de A. Montrer que tous les idéaux de l'anneau quotient A/I sont principaux.
(2) Trouver tous les idéaux des anneaux suivants : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[x]/(f)$ où (f) est l'idéal principal engendré par un polynôme f.
(3) Trouver les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Q}[x]/(f)$.

Exercice 33.
(1) Montrer que les idéaux $(5, x^2+3)$, $(x^2+1, x+2)$, (x^3-1, x^4-1) ne sont pas principaux dans $\mathbb{Z}[x]$.
(2) Les idéaux $(x, x+1)$, $(5, x^2+4)$ et $(x^2+1, x+2)$ sont-ils premiers ou maximaux dans $\mathbb{Z}[x]$?

Exercice 34. (Anneaux intégralement clos) Soient A un anneau intègre et K son coprs de fractions. On dit qu'un élément x de K est *entier* sur A s'il vérifie une équation

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \qquad \text{avec } a_i \in A.$$

On dit que A est *intégralement clos* si pour tout $x \in K$ qui est entier sur A on a $x \in A$.
(1) Montrer qu'un anneau factoriel est intégralement clos.
(2) Soit d un entier sans facteur carré. Posons $A = \mathbb{Z}[X]/(X^2-d)$ et δ la classe de X dans A. Montrer que si $d \equiv 1 \mod 4$, alots A n'est pas intégralement clos.

Exercice 35. On dit qu'un nombre algébrique (sur $\mathbb{Q}$) est un *entier algébrique* s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers.
(1) Montrer qu'un nombre algébrique est un entier algébrique si et seulement si son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ est à coefficients entiers.
(2) Montrer qu'un nombre rationnel est une entier algébrique si et seulement s'il est entier.
(3) On suppose que α est un nombre algébrique et racine d'un polynôme irréductible

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad \text{avec } a_n \neq 0,\ a_i \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que $a_n\alpha$ est un entier algébrique.
(4) Les nombres algébriques suivants sont-ils des entiers algébriques : i, $\frac{i}{2}$, $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$?
Dans la suite, on fixe un entier $d \in \mathbb{Z}$ sans facteur carré, une de ses racines carrées $\delta \in \mathbb{C}$ et le corps $\mathbb{Q}(\delta)$.

(5) Montrer que le polynôme $X^2 - 2aX + a^2 - db^2$ annule $a + b\delta$. Montrer que $a + b\delta$ pour $a, b \in \mathbb{Q}$ est un entier algébrique si et seulement si $a^2 - db^2$ et $2a$ sont des entiers.

(6) Déterminer les entiers algébriques du corps $\mathbb{Q}(i)$.

(7) Montrer que les entiers alébriques de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sont les $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

(8) Est-il vrai que les entiers algébriques de $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ sont les $a + ib\sqrt{3}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$?

Exercice 36. Théorème des zéros de Hilbert.

(1) Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de E.

Soit $\mathcal{C}$ une famille libre de E. Montrer que

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C} \cap \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n).$$

En déduire que $\mathcal{C}$ est au plus dénombrable.

Justifier que l'on peut donc parler d'espace vectoriel de dimension dénombrable.

(2) Montrer que $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ est un espace vectoriel de dimension dénombrable.

(3) Montrer que $\mathbb{C}(X)$ n'est pas un espace vectoriel de dimension dénombrable.

(4) Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que l'idéal $I = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ est maximal.

Réciproquement, soit I un idéal maximal de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$.

(5) Montrer que si $n = 1$, il existe $a_1 \in \mathbb{C}$ tel que $I = (X_1 - a_1)$.

(6) Pour $i = 1, \ldots, n$, soit

$$\varphi_i : \mathbb{C}[X_i] \longrightarrow \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/I.$$

Montrer que φ_i n'est pas injective.

(7) Montrer qu'il existe a_i tel que $\mathrm{Ker}\,\varphi_i = (X_i - a_i)$.

(8) En déduire que $I = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$.

(9) Soit $P_1, \ldots, P_m$ dans $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que

$$P_1(x) = \cdots = P_m(x)$$

n'a pas de solutioin dans $\mathbb{C}^n$.

Montrer qu'il existe $Q_1, \ldots, Q_m$ dans $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que

$$1 = P_1Q_1 + \cdots + P_mQ_m.$$

Feuille d'exercices 5 : Indications

Exercice 1. Il s'agit de voir si les sous-ensembles cotiennent 0 et 1 et sont stables par les opérations $+, -, \times$ pour être un sous-annneau. Pour être un sous-corps il faut en plus être stable par inversion z^{-1}.

(1) oui. Donc il faut écrire chaque propriété.
(2) non. Donc il faut trouver un cotre-exemple à une des propriétés.
(3) oui et oui.
(4) non. Donc il faut trouver un cotre-exemple à une des propriétés. Pour la choisir, comparer aux exemples précédents.
(5) $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$: comment calcule t-on l'inverse d'un nombre complexe ?
$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$: Ce qui fait fonnctionner la multiplication par l'expression conjuguée du dénominateur est la formule $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Exercice 2. (1) On part de $z_1 z_2 = 1$ et on prend le module.
Penser à vérifier que les conditions nécessaires trouvées sont suffisantes.
(2) La multiplication $\bar{z}$ fait disparaitre i car $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Quel est l'annalogue pour $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?

Exercice 3. (1) Ecrire les définitions et relever dans $\mathbb{Z}$.
(2) On a envie d'écrire l'inverse de $1+x$ comme $\frac{1}{1+x}$. Alors les développements limités donnent un candidat pour cet inverse.
(3) Pour la stabilité par addition utiliser le binnôme de Newton.

Exercice 4. (1) Une inclusion est évidente. La réciproque utilise l'hypothèse.
(2) Calculer IJ pour deux idéaux de $\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Supposer qu'il existe a dans l'anneau tel que (a) soit égal à l'idéal. Trouver des conditions nécessaires sur a à l'aide d'éléments variés de l'idéal.
Pour le troisième cas, considérer $\sqrt{|f|}$.

Exercice 6. Mimer la preuve de l'infinité de l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 7. Dans un sens, on a la division euclidienne.
Dans l'autre, on a un élément non inversible a et non nul. Construire un idéal de $A[X]$ avec a et X.

Exercice 8. (1) $(x-1) \mid f(x)$ équivaut à $f(1) = 0$.
(2) Expliquer pourquoi on peut effectuer cette division euclidienne.
Ecrire la division formellement $A = BQ + R$, puis obtenir des informations sur R en prenant des valeurs.

Exercice 9. (1) Raisonner sur le degré des diviseurs éventuels.
(2) Utiliser la première question.

(3) Trouver les polynômes réductibles.

Exercice 10. (1) Voir exercice précédent.
(2) Chercher tous les diviseurs de degré 1 et 2.

Exercice 11. Partir de $A = PQ$.

Exercice 12. Partir avec $f = QR$. D'après Gauss, on peut supposer que Q et R sont à coefficients entiers. En évaluant aux a_i et en utilisant Lagrange, montrer que $Q = R$. Montrer que Q est de la forme $\prod_i (x - a_i) \pm 1$.
Pour g, dériver la relation $g = QR$.

Exercice 13. Justifier que les pgcd de f et g dans $\mathbb{Q}[x]$ et $\mathbb{C}[X]$ sont égaux.

Exercice 14. Montrer que l'on peut travailler dans $\mathbb{C}[X]$. Raisonner enn terme de racines.

Exercice 15. Il s'agit d'appliquer l'algorithme d'Euclide.

Exercice 16. Il s'agit d'appliquer l'algorithme d'Euclide.

Exercice 17. Montrer que l'on peut travailler dans $\mathbb{Q}[X]$ et appliquer l'algorithme d'Euclide.

Exercice 18. Montrer qu'il suffit de montrer que f est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$.
(1) Raisonner dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$;
(2) Raisonner dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$;
(3) Raisonner dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$;

Exercice 19. (1) Ecrire le polynôme sous forme canonique, comme pour la théorie du discriminant.
(2) Déterminer les inversible de A. Ecrire le polyôme comme produit de polyômes de degré 1 et aboutir à une contradiction.
(3) Penser au lemme de Gauss.

Exercice 20. Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$.
(1) Utiliser la réduction modulo 2.
(2) Utiliser la réduction modulo n.

Exercice 21. (1) Ecrire P sous forme développer. Montrer que b divise le coefficient dominant de P. En déduire que le quotient de P par $bX - a$ est à coefficients entiers.
(2) Montrer que a divise le coefficient constant de P. Appliquer la première question.

Exercice 22. (1) Utiliser la formule de Taylor.
(2) Facile.

Exercice 23. Soit $(x^3 - x + 2)$ l'idéal principal engendré par $x^3 - x + 2$ dans l'anneau $\mathbb{Q}[x]$.

(1) Il s'agit de montrer que $x^3 - x + 2$ est irréductible. Penser à Gauss.
(2) Relever la question à $\mathbb{Q}[x]$.
(3) Relever la question à $\mathbb{Q}[x]$.

Exercice 24. Les polynômes suivants sont-ils irréductibles ?

(1) Gauss pour remonter dans $\mathbb{Z}$ + réduction dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
(2) Considérer f comme un élément de $(\mathbb{C}[Y])[X]$ et $(\mathbb{F}_2[Y])[X]$.
(3) Considérer f comme un polynôme en X.

Exercice 25. Considérer l'idéal engendré par $x^2 + 1$ et y.

Exercice 26. Vrai ou faux ?

(1) Considérer l'idéal engendré par X et Y.
(2) Considérer l'idéal engendré par 2 et X.
(3) Théorème de transfert de A à $A[X]$.
(4) Utiliser les questions précédentes.
(5) C'est du cours.
(6) C'est du cours.

Exercice 27. Le noyau est un idéal !

Exercice 28. Considérer l'anneau quotient et les puissances d'un élément non nul.

Exercice 29. Montrer que si M est inclus dans I.

Exercice 30. (1) Montrer l'isomorphisme $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(m) \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[X]/(X^2 - d)$.
(2) Même indication.

Exercice 31. (1) Simple vérificationnn.
(2) Considérer le morphisme $a + I \mapsto a + (I + J)$ de l'anneau A/I vers l'anneau $A/(I + J)$.

Exercice 32. (1) Considérer la préimage de l'idéal de A/I dans A.
(2) Considérer la préimage de l'idéal de A/I dans A.
(3) Utiliser la question précédente.

Exercice 33. (1) Si $(5, x^2 + 3) = (P)$ alors 5 et $x^2 + 3$ divisent P.
(2) Etudier les anneaux quotients en vous servant respectivement de $\mathbb{Z}[x]/(x)$, $\mathbb{Z}[x]/(5)$ et $\mathbb{Z}[x]/(x + 2)$.

Exercice 34. (Anneaux intégralement clos) Soient A un anneau intègre et K son coprs de fractions. On dit qu'un élément x de K est *entier* sur A s'il vérifie une équation

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \qquad \text{avec } a_i \in A.$$

On dit que A est *intégralement clos* si pour tout $x \in K$ qui est entier sur A on a $x \in A$.

(1) Ecrire $x = p/q$ avec p et q premiers entre eux et chasser les dénomiateurs de l'expression $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$.

(2) Considérer $\frac{1+\delta}{2}$.

Exercice 35. On dit qu'un nombre algébrique (sur $\mathbb{Q}$) est un *entier algébrique* s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers.

(1) Penser au lemme de Gauss.

(2) Utiliser l'exercice précédent.

(3) Construire explicitemet un polyôme unitaire annulant $a_n\alpha$.

(4) Calculer les polyômes minimaux et utiliser la première question.

Dans la suite, on fixe un entier $d \in \mathbb{Z}$ sans facteur carré, une de ses racines carrées $\delta \in \mathbb{C}$ et le corps $\mathbb{Q}(\delta)$.

(5) Encore la question 1.

(6) Utiliser la question précédente.

(7) Idem.

(8) Non. Idem.