Université Claude Bernard Lyon 1 — Anneaux et Corps
Semestre de printemps 2022-23 — Licence 3

Examen 2 – Durée 70 min – mardi 28 mars 2023

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
L'énoncé comporte 2 exercices.

Exercice 1. Un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$

1. Lister tous les polynômes irréductibles dans $\mathbb{F}_2[X]$ de degré 1, 2 et 3.
2. Factoriser, en produit d'iiréductibles, dans $\mathbb{F}_2[X]$, le polynôme $A = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + 1$.
3. Le polynôme $X^3 - X + 1$ est-il irrééductible dans $\mathbb{F}_3[X]$?
4. Factoriser, en produit d'iiréductibles, dans $\mathbb{F}_3[X]$, le polynôme $B = X^6 - X^5 - X^4 - X^2 - X + 1$. On justifiera l'irréductibilité de chaque facteur trouvé.
   Indication : utiliser le polynôme de la question précédente.
5. Montrer que le polynôme $P = X^6 + 5X^5 + 11X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 4X + 7$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 2. Un polynôme irréductible dans $\mathbb{F}_5[X]$

1. Le nombre 2 est-il un carré dans $\mathbb{F}_5$?
2. Montrer que $P_0 := X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_5[X]$.
3. Soit $P(X) \in \mathbb{F}_5[X]$ un polynôme unitaire irréductible de degré 2. Rappeler pourquoi $\mathbb{F}_5[X]/(P)$ est isomorphe à $\mathbb{F}_{25}$.
4. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5[X]/(P_0)$ et α la classe de X. Montrer que tout $\beta \in \mathbb{K}$ s'écrit de manière unique $a\alpha + b$ avec a et b dans $\mathbb{F}_5 = \{0, \pm 1, \pm 2\}$.
5. Soit $Q = X^5 - X + 1$. Montrer que Q n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_{25}$.
6. En déduire que Q est irréductible dans $\mathbb{F}_5[X]$.
7. En déduire que Q est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.