
Feuille d'exercices n° 4: Indice, formules de Cauchy

Exercice 1. Soit γ le lacet défini par $\gamma(t) = \cos t + i \sin(3t)$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$.

1) Tracer γ . Décrire informellement (sans preuve!) les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ et les valeurs de l'indice de γ par rapport aux points de ces différentes composantes connexes.

2) Déterminer les valeurs $\text{Ind}(\frac{3}{4}, \gamma)$ et $\text{Ind}(0, \gamma)$ (cette fois-ci en étant précis dans son argumentation).

Exercice 2. Soit γ le cercle centré en 2 et de rayon 1. Calculer $\int_{\gamma} \frac{z+1}{z} dz$.

Exercice 3. Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_C \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}$.

Exercice 4. Soit γ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parcourue dans le sens direct, avec $a, b > 0$. En calculant de deux façons différentes $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, déterminer la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$.

Exercice 5. Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct.

1) Pour $m \in \mathbb{Z}$, rappeler la valeur de $\int_C z^m dz$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, calculer $\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$.

En déduire $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt$ et $\int_0^{2\pi} \sin^{2n} t dt$.

3) Obtenir de façon analogue $\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} t dt$ et $\int_0^{2\pi} \sin^{2n+1} t dt$.

Exercice 6. Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1 et soit $n \geq 1$. Calculer :

$$1) \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz \qquad 2) \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z} dz \qquad 3) \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^n} dz \qquad 4) \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2} dz.$$

Exercice 7. En intégrant $z \mapsto e^z$ le long d'un chemin convenable, montrer que pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$ et pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) \geq 0$ on a :

$$|e^{bz} - e^{az}| \leq (b-a)|z|e^{b\text{Re}(z)}.$$

Exercice 8. Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct et soit P un polynôme dont aucune racine n'est de module 1. De quoi $\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{P'(z)}{P(z)} dz$ est-il le nombre ?

Exercice 9. Soit γ un chemin, h et φ des fonctions de \mathbb{C} vers \mathbb{C} . On suppose φ continue et h holomorphe. Pour tout w dans \mathbb{C} , on pose :

$$F(w) = \int_{\gamma} \varphi(z)h(z+w) dz.$$

Montrer que la fonction F est holomorphe sur \mathbb{C} . (On pourra utiliser le théorème de Morera).

Exercice 10. On note C le cercle unité de \mathbb{C} (qu'on parcourt une fois dans le sens direct dans les intégrales ci-dessous).

Soit $\varphi : C \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que

$$\overline{\int_C \varphi(z) dz} = - \int_C \overline{\varphi(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

Soit U un domaine contenant le disque fermé $\bar{D}(0,1)$, soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit $z_0 \in U \setminus C$.

Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\overline{f(z)}}{z - z_0} dz$ est égal à $\overline{f(0)}$ si $|z_0| < 1$ et égal à $\overline{f(0)} - \overline{f(1/\bar{z}_0)}$ si $|z_0| > 1$.