Feuille d'exercices n° 3: Déterminations holomorphes

Exercice 1 (Racine p-ième)**.** Soit $p \geq 2$ un entier. Pour U ouvert de $\mathbb{C}$, on appelle détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ telle que :
pour tout $z \in U$, $(f(z))^p = z$.

1. Dans cette question, on suppose que $0 \in U$. Montrer qu'il n'y a pas de détermination holomorphe de la racine p-ième sur U.
2. Dans cette question, on suppose U connexe non vide.
   (a) Soit f_1 et f_2 deux déterminations holomorphes de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f_1 = \lambda f_2$.
   (b) En déduire que s'il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U alors il en existe exactement p, en les décrivant.
3. (a) Montrer que s'il existe une détermination holomorphe du log sur U alors il existe une détermination de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U.
   (b) Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe f de $z \mapsto z^{1/3}$ sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ telle que $f(1) = e^{4i\pi/3}$. Calculer $f(i)$ et déterminer $f(U)$.
   (c) Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe g de $z \mapsto z^{1/2}$ sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ telle que $g(-1) = i$. Déterminer $g(U)$.
4. Dans cette question on suppose que U a deux composantes connexes. Combien peut-il y avoir de déterminations de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U ?

Exercice 2 (Racine carrée d'une fonction holomorphe)**.** Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$.

1. Soit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto 1 - z^2$. Montrer que $\varphi(U) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Cette inclusion est-elle ou non une égalité ?
2. On note log une détermination du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Montrer que la fonction $g : U \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = e^{\frac{1}{2}\log(1-z^2)}$ est bien définie et holomorphe sur U. Calculer son carré et sa dérivée.
3. Notons V le plan complexe privé du segment réel $[-1, 1]$. Vérifier que pour $z \in V$, on a $z^{-1} \in U$. On définit alors $h : V \to \mathbb{C}$ par $h(z) = izg(z^{-1})$. Montrer que h est bien définie et holomorphe sur V. Calculer son carré et sa dérivée.

Exercice 3 (Déterminations de l'arcsinus)**.** Pour U ouvert de $\mathbb{C}$, on appelle détermination holomorphe sur U de la fonction arcsinus toute fonction holomorphe f sur U telle que $\sin(f(z)) = z$ pour tout $z \in U$.

1. Montrer que s'il existe une détermination holomorphe sur U de arcsinus alors $-1 \notin U$ et $1 \notin U$.
2. (a) Montrer que pour tous w, z complexes, $\sin w = z \iff (e^{iw} - iz)^2 = 1 - z^2$.
   (b) Soit U un ouvert de C et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Déduire du (a) que les assertions suivantes sont équivalentes :
      i. f est une détermination holomorphe sur U de arcsinus.
      ii. Il existe g holomorphe sur U qui vérifie en tout point les deux relations : $g(z) + iz = e^{if(z)}$ et $[g(z)]^2 = 1 - z^2$.
3. Montrer que dans ce cas, $f'(z) = \dfrac{1}{g(z)}$ pour tout $z \in U$.
4. Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe une unique détermination f de arcsinus sur U telle que $f(0) = 0$.

Exercice 4 (Un exemple de détermination du logarithme)**.** On note $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z \neq \sqrt{\mathrm{Re} z}\}$. L'objectif de l'exercice est de construire une détermination holomorphe du logarithme sur l'ouvert U. On notera Log la détermination principale du logarithme, définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, et on notera E le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z < 0\}$.

1. Montrer que U n'est étoilé par rapport à aucun de ses points.
2. Pour $z \in E$, calculer $\mathrm{Log}(-z) - \mathrm{Log} z$.
3. Expliciter deux ouverts V et W de $\mathbb{C}^*$ vérifiant :

$$V \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \qquad W \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \qquad V \cup W = U \qquad V \cap W = E.$$

4. Justifier que cela a un sens de définir une application f sur U en posant $f(z) = \mathrm{Log}\, z$ sur V et $f(z) = \mathrm{Log}(-z) - i\pi$ sur W, puis montrer que cette f constitue une détermination holomorphe du logarithme sur U.

Exercice 5 (Un ouvert sans détermination continue du logarithme)**.**
On note $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im} z| > 1 \text{ ou } |\mathrm{Re} z| > 1\}$.
Montrer qu'il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur U.

Exercice 6 (Encore un exemple de détermination holomorphe du logarithme)**.**
On note $U = \mathbb{C}^* \setminus \{e^{(1+i)\varphi} \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$.

1. Dessiner U.
2. Soit γ un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux tracé de $[0,1]$ dans U. Pour $t \in [0,1]$, on pose :

$$\eta(t) = \gamma(t) e^{-i \ln |\gamma(t)|}.$$

   (a) Véfifier que η est un lacet tracé dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

   (b) Soit $[a,b] \subset [0,1]$ un intervalle sur lequel γ est $\mathcal{C}^1$. Montrer que la fonction $t \mapsto \ln|\gamma(t)|$ est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et expliciter sa dérivée. En déduire que le lacet η est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et expliciter sa dérivée.
   En déduire que :

$$\int_{\eta_{|[a,b]}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\gamma_{|[a,b]}} \frac{\mathrm{d}z}{z} - i\mathrm{Re}\left(\int_{\gamma_{|[a,b]}} \frac{\mathrm{d}z}{z}\right).$$

   (c) En déduire que $\displaystyle\int_\eta \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$.

3. Montrer qu'il existe une détermination holomorphe du logarithme sur U.