Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024
UE d'analyse complexe

Feuille d'exercices n° 1 : Séries entières

Exercice 1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum a_n z^{3n}$,
2. $\sum a_n 3^n z^{2n}$,
3. On suppose désormais $R > 0$. Montrer que la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

1. $\sum (-1)^n \dfrac{n^n}{n!} z^{4n+1}$,
2. $\sum \dfrac{n!}{1.3\dots(2n+1)} z^{2n+3}$.
3. $\sum (1 + (-1)^n/n)^{(n^2)} z^n$.
4. $\sum z^{n!}$,
5. $\sum n^n z^{n^2}$.

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence, R, de $\sum \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$, puis étudier sa convergence pour $|z| = R$.

Exercice 4. Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
2. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même domaine de convergence.

Exercice 5. Calculer le rayon de convergence des séries entières associées et pour $z = x \in \mathbb{R}$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} z^n$,

4*. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} z^n$

5*. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} z^n$

Exercice 6. On pose $g(z) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Montrer que g est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et donner sa somme lorsque $z = x \in \mathbb{R}$. Pour $z \neq 0$, on pose $f(z) = \frac{g(z)}{z}$. Montrer que f se prolonge en une fonction entière.

Exercice 7. Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$ et soit $R > 0$. Montrer que pour n suffisamment grand, P_n n'a pas de racines dans le disque fermé de rayon R.

Exercice 8. Pour un entier $n \geq 1$, on note $d(n)$ (respect. $s(n)$) le nombre de diviseurs (respect. leur somme) de n qui sont supérieurs à 1. Montrer que les séries entières $\sum d(n)z^n$ et $\sum s(n)z^n$ ont pour rayon de convergence 1.

Pour s'entraîner :

Exercice 9. Soit $f = \sum_n a_n z^n$ une série entière où a_n est la suite de Fibonacci définie par $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ et $a_0 = a_1 = 1$.

1. Montrer que pour z dans le disque de convergence, on a :

$$f(z) = (z^2 + z)f(z) + 1.$$

2. Montrer que le rayon de convergence de f est l'inverse du nombre d'or $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Indication : considérer $d_n = a_{n+1}/a_n$; γ la racine positive de $X^2 - X - 1 = 0$ et étudier la suite $d_n - \gamma$.