

Aucune démonstration de cours ne sera demandée à l'examen. Vous serez toutefois évalué.e, notamment, sur votre maîtrise précise des définitions et des énoncés des principaux résultats, ainsi que sur votre capacité à mobiliser immédiatement ces énoncés ou à produire des contre-exemples simples lorsqu'une des hypothèses d'un théorème est oubliée.

Voici un exemple concret.

**Exercice 1.** *Vrai ou faux ? Justifier votre réponse par une preuve ou un contre-exemple explicite.*

1. *Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ouvert  $\Omega$  qui atteint son maximum en un point  $z_0 \in \Omega$ . Alors,  $f$  est constante.*

*Réponse : FAUX. Commençons par remarquer que le mot "connexe" a été omis oublié dans l'énoncé. Soit  $\Omega = D_1 \cup D_2$  la réunion de deux disques ouverts disjoints et  $f$  la fonction qui vaut 1 sur  $D_1$  et 2 sur  $D_2$ . Alors,  $f$  est holomorphe, atteint son maximum en tout point de  $D_2$ , mais n'est pas constante.*

2. *Soit  $\Omega$  un ouvert simplement connexe et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^*$  une fonction holomorphe. Alors, il existe une détermination holomorphe du logarithme de  $f$ .*

*Réponse : VRAI. Par le cours (Prop 39), il existe une détermination holomorphe du logarithme de  $f$  si  $f'/f$  admet une primitive dans  $\Omega$ . Par le cours (Cor 145), c'est le cas, puisque  $\Omega$  est simplement connexe.*

Voici à présent une lecture du cours pour en expliciter les attendus.

Le théorème de Goursat fait le lien entre holomorphie d'une fonction  $f$ , une propriété locale, et une propriété globale, l'existence d'une primitive de cette fonction sur un ouvert étoilé (conséquence directe de la nullité de l'intégrale de  $f$  sur un contour triangulaire). Le théorème de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier, est l'outil qu'on a utilisé pour montrer qu'une fonction holomorphe sur une couronne est développable en série de Laurent.

Les preuves de ces deux théorèmes sont profondes et difficiles : je souhaite que vous en ayez une idée, mais je n'attends pas que vous les maîtrisiez.

Pour bien maîtriser son cours, il est en revanche très utile de savoir

- le chapitre 1 (rappels sur les nombres complexes) sur le bout des doigts
- au chapitre 2, savoir écrire et utiliser les conditions de Cauchy-Riemann dans des cas simples, savoir qu'une série entière est holomorphe (mais pas savoir le re-démontrer en première lecture), savoir démontrer que les coefficients de cette série sont les coefficients de Taylor de sa somme (corollaire 25 et sa preuve), connaître et savoir manipuler les définitions de l'exponentielle complexe et du logarithme principal, savoir caractériser les fonctions admettant un logarithme holomorphe (preuve de la prop 39)
- au chapitre 3, connaître la définition de l'intégrale complexe et de l'indice, savoir démontrer que le th de Cauchy 57 est conséquence du th de Goursat 54, que les formules de Cauchy 59 et 61 sont conséquences du th de Cauchy et que les inégalités de Cauchy 63 sont conséquence des formules de Cauchy 61. Des théorèmes 64 à 69, on ne demande de connaître que les énoncés (précis)
- au chapitre 4, la proposition 71 doit être connue sur le bout des doigts, en sachant mobiliser les énoncés du chapitre 3 pour la démontrer. Démontrer le th 72 est facile, ne pas se priver de connaître la preuve de ce résultat bien utile et souvent utilisé. La section 4.2 sur le principe des zéros isolés est à connaître et à savoir utiliser, sans besoin de s'attarder sur les preuves des énoncés. Pour le principe du maximum, seul son énoncé sur les domaines bornés et son utilisation doivent être parfaitement maîtrisés. Tout le reste de la section 4.3 est plus secondaire et pourra être révisé une fois les bases bien maîtrisées
- du chapitre 5, il faut connaître précisément le théorème 89 sur les séries de Fourier mais non sa preuve. La démonstration du lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction de classe  $C^1$  est simple, retenez-là. J'attends aussi que vous sachiez dériver les équations de Cauchy-Riemann en

polaires (lemme 94), c'est un bon exercice de calcul différentiel. De même, démontrer le th 96 sur le développement en série de Laurent en prenant pour acquis le th 89 est assez simple et bien utile, tout comme la caractérisation des singularités isolées au th 99 : retenez ces éléments-là. L'énoncé du théorème des résidus 108 doit être parfaitement connu et on doit savoir l'appliquer pour calculer des intégrales dans des cas simples. Le théorème de Rouché 113 est utile et je vous invite à connaître sa preuve qui est courte et accessible. L'énoncé du théorème d'inversion globale 118 doit être maîtrisé.

- au chapitre 6, on demande de comprendre la définition d'équivalence conforme. Il faut savoir expliciter des exemples d'ouverts conformes, par exemple une homographie envoyant un demi-plan sur un disque (Exemple 132). Il faut aussi savoir pourquoi le disque, la sphère de Riemann et le plan ne sont pas conformes (Prop 138) ou pourquoi un disque et une couronne ne le sont pas non plus (Exemple 131). Des ouverts simplement connexes, outre leur définition, il faut comprendre comment la plupart des résultats énoncés pour des ouverts étoilés s'étendent à ces ouverts plus généraux (l'exercice 1 ci-dessus en est une illustration). Du théorème de représentation conforme, on ne retiendra que l'énoncé (aucun élément de sa preuve ne sera exigible).