Examen partiel - Durée: 1h30

Tous objets électroniques (smartphone, montre connectée, calculatrice, etc.) et documents interdits

---

Exercice 1. Soit K un compact connexe de $\mathbb{C}$ tel que l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ soit connexe. Soient z_1 et z_2 des éléments de K.
On note f la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z - z_1} - \dfrac{1}{z - z_2}$, définie sur Ω.

1. Soit γ un lacet C^1 par morceaux de support (ou image) contenu dans Ω.
   a) Montrer que $\operatorname{Ind}(z_1, \gamma) = \operatorname{Ind}(z_2, \gamma)$.
   b) En déduire que la fonction f admet une primitive sur Ω.
2. a) Soit F une primitive de f sur Ω. Montrer que la fonction $z \mapsto \dfrac{z - z_1}{z - z_2} \exp(-F(z))$ est constante sur Ω.

   b) En déduire qu'il existe une fonction holomorphe g sur Ω telle que pour tout $z \in \Omega$,
   $$\frac{z - z_1}{z - z_2} = \exp(g(z)).$$
   c) En déduire que pour tout $n \geq 2$, il existe une fonction holomorphe h sur Ω telle que
   $$\forall z \in \Omega, \quad \frac{z - z_1}{z - z_2} = (h(z))^n.$$
3. Soit P un polynôme de degré $d \geq 2$ dont on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ les racines (distinctes ou confondues). On suppose que toutes ces racines sont dans K. Montrer qu'il existe une fonction φ holomorphe sur Ω telle que pour tout $z \in \Omega$, $(\varphi(z))^d = P(z)$.

Exercice 2. Une fonction u définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite *harmonique* lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$
Dans cet exercice on notera, pour tout r réel strictement positif
$$D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}.$$

A. Soit Ω un ouvert *convexe* non vide de $\mathbb{C}$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique.
   1. On note $g = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$.
      Montrer que g est une fonction holomorphe sur Ω.
   2. On note z_0 un point de Ω. Justifier l'existence d'une fonction holomorphe f définie sur Ω qui vérifie d'une part $f' = g$ et d'autre part $f(z_0) = u(z_0)$.
   3. Soit $P = \operatorname{Re} f$. En calculant les dérivées partielles de $P - u$, montrer que $\operatorname{Re} f = u$.

B. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ qui contient $\overline{D_1}$ (la barre désigne ici l'adhérence), et u une fonction harmonique de Ω vers $\mathbb{R}$. On suppose que $u(z) = 0$ pour tout complexe z de module 1.

1. a) Justifier l'existence d'un réel $\epsilon > 0$ tel que le disque $D_{1+\epsilon}$ soit inclus dans Ω.
   b) Justifier l'existence d'une fonction holomorphe f définie sur $D_{1+\epsilon}$ telle que $\operatorname{Re} f = u$.
2. a) Rappeler comment on déduit de la formule de Cauchy la formule de la moyenne suivante :

$$f(0) = \int_0^1 f(e^{2i\pi t})\, dt.$$

   b) En déduire que $u(0) = 0$.
3. a) Soit α un complexe avec $|\alpha| < 1$. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{\alpha}}\}$, on pose :

$$h_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}.$$

   Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\overline{\alpha}}\}$,

$$|h_\alpha(z)| < 1 \iff |z| < 1 \qquad \text{et} \qquad |h_\alpha(z)| = 1 \iff |z| = 1.$$

   b) Justifier que la fonction $f \circ h_\alpha$ est définie et holomorphe sur un ouvert qui contient $\overline{D}_1$.
   Indication : considérer l'ensemble $\Omega_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |h_\alpha(z)| < 1 + \epsilon\}$.
   c) Montrer que $u(\alpha) = 0$.

C. Existe-t-il une fonction u harmonique sur $\mathbb{C}^*$ qui soit nulle en tous les z de module 1 sans être elle-même nulle ?