Examen final - Durée: 2h

Tous objets électroniques (smartphone, montre connectée, calculatrice, etc.) et documents interdits.

IL Y A TROIS EXERCICES
RÉDIGER CHAQUE EXERCICE SUR UNE COPIE SÉPARÉE

Exercice 1. Vrai ou faux ? Justifier votre réponse par une preuve ou un contre-exemple explicite.

1. Soient z_1, z_2 deux nombres complexes, θ_1 l'argument principal de z_1, θ_2 celui de z_2 et θ celui de $z_1 z_2$. Alors, $\theta = \theta_1 + \theta_2$.
2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et γ un lacet de classe C^1 par morceaux de support (ou image) inclus dans Ω. Alors,
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$
3. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière non constante s'annulant en un nombre infini (dénombrable) de points deux à deux distincts, notés z_n, $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$.
4. Soit D un disque ouvert de $\mathbb{C}$. Alors, $\mathbb{C}$ et D sont conformes, c'est-à-dire qu'il existe un biholomorphisme de $\mathbb{C}$ sur D.

Exercice 2. Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$ et $f : \mathbb{C} \setminus i\pi(2\mathbb{Z} + 1) \to \mathbb{C}$ la fonction définie par
$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}$$

1. Soit R un nombre réel strictement positif et γ un lacet dont le support (ou l'image) est le rectangle de sommets $-R$, R, $R + 2i\pi$ et $-R + 2i\pi$. Calculer le (les) résidu(s) de f en son (ses) pôle(s) intérieur(s) à γ.
2. Montrer que
$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(R + iy)dy = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(-R + iy)dy = 0.$$
3. Montrer que l'intégrale généralisée
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx$$
est convergente et calculer sa valeur en fonction de a.

Exercice 3. On considère la fonction 1-périodique $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$$

1. Montrer que la relation (supposée connue pour des nombres réels a, b),

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

   reste valable pour tous nombres complexes a, b.
2. Montrer que f est bornée sur l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\Re(z)| \leq 1, |\Im(z)| \geq 2\}$.
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que f est développable en série de Laurent sur l'ensemble $\dot{D}(k, 1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - k| < 1\}$.
4. Calculer la partie principale de la série de Laurent associée.
5. Montrer que la fonction

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-k)^2}$$

   est définie et holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
6. Montrer que g est bornée sur l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\Re(z)| \leq 1, |\Im(z)| \geq 2\}$.
7. Soit $E = f - g$. Montrer que E est prolongeable en une fonction entière et périodique de période $T = 1$.
8. Montrer que E est bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier.
9. En déduire que $f = g$.