I) ① a) Notons Γ le support de γ. Comme $\Gamma \subset \Omega$, $K \subset \mathbb{C}\setminus\Gamma$

Notons U la composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ qui contient z_1,
K ~~et U sont dans~~ est un connexe contenu dans $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ et contenant z_1,
tandis que U est la réunion de tous les connexes contenus dans $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ et contenant z_1, donc $K \subset U$ et en particulier $z_2 \in U$.
On sait que l'indice est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, comme $z_1 \in U$ et $z_2 \in U$, $\mathrm{Ind}(z_1,\gamma) = \mathrm{Ind}(z_2,\gamma)$

b) La fonction f est définie et continue sur Ω
Pour tout lacet C^1 par morceaux de support contenu dans Ω

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi\,\mathrm{Ind}(z_1,\gamma) - 2i\pi\,\mathrm{Ind}(z_2,\gamma) = 0$$

Ceci entraîne l'existence d'une primitive de f

② a) Notons $h(z) = \dfrac{z-z_1}{z-z_2}$, définie sur Ω et holomorphe
de dérivée $h'(z) = \dfrac{z_1-z_2}{(z-z_2)^2}$

Notons ensuite $k(z) = h(z)\,e^{-F(z)}$, définie et holomorphe sur Ω
On explicite

$$k'(z) = e^{-F(z)}\left[h'(z) - F'(z)\,h(z)\right]$$ où le crochet vaut

$$h'(z) - F'(z)\,h(z) = \frac{z_1-z_2}{(z-z_2)^2} + \left[\frac{1}{z-z_2} - \frac{1}{z-z_1}\right]\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

$$= \frac{z_1-z_2}{(z-z_2)^2} + \frac{z-z_1}{(z-z_2)^2} - \frac{1}{z-z_2}$$

$$= \frac{z-z_2}{(z-z_2)^2} - \frac{1}{z-z_2} = \frac{1}{z-z_2} - \frac{1}{z-z_2} = 0$$

d'où $k'(z) = 0$. Comme Ω est connexe, k est constante

b) ~~...~~ K est compact donc $K \neq \mathbb{C}$ donc $\Omega \neq \emptyset$

Prenons un $z_0 \in \Omega$

$$k(z_0) = (z_0 - z_1)\, e^{-F(z_0)} \neq 0 \quad \text{puisque } z_1 \notin \Omega$$

on peut donc prendre un $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $e^{\alpha} = k(z_0)$

Posons $g(z) = F(z) + \alpha$, qui est holomorphe sur Ω

Pour $z \in \Omega$ $\quad \dfrac{z - z_1}{z - z_2}\, e^{-g(z)} = k(z)\, e^{-\alpha} = k(z_0)\, e^{-\alpha}$ (puisque k est constante)

$$= 1$$

donc pour tout $z \in \Omega$ $\quad \dfrac{z - z_1}{z - z_2} = e^{g(z)}$

c) Soit $n \geq 1$

La fonction $z \longmapsto \exp\left(\dfrac{g(z)}{n}\right)$ répond à la question

(3) Notons λ le coefficient dominant de P de sorte que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{d} (X - \alpha_k).$$

On peut prendre un $\mu \in \mathbb{C}^*$ avec $\mu^d = \lambda$

Pour tout $k \in \{2, \dots, d\}$ on applique le 2c à $z_1 = \alpha_k$, $z_2 = \alpha_1$ et $n = d$

On obtient une h_k holomorphe sur Ω

telle que pour tout $z \in \Omega$ $\quad [h_k(z)]^d = \dfrac{z - \alpha_k}{z - \alpha_1}$

On pose alors $\quad \varphi(z) = \mu\, (z - \alpha_1) \displaystyle\prod_{k=2}^{d} h_k(z)$

On constate que pour tout $z \in \Omega$

$$[\varphi(z)]^d = \mu^d (z - \alpha_1)^d \prod_{k=2}^{d} \frac{z - \alpha_k}{z - \alpha_1} = \lambda \prod_{k=1}^{d} (z - \alpha_k)$$

$$= P(z)$$

2) A) 1) v est $\mathcal{C}^2$ donc différentiable, donc g aussi.

On calcule $\frac{\partial g}{\partial y} - i\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$

$= -i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = 0$.

g est donc différentiable sur Ω et vérifie la condition de Cauchy-Riemann en tout point, donc holomorphe sur Ω.

2) Ω étant convexe, il est étoilé. La fonction holomorphe g possède au moins une primitive ; prenons en une notée f_1. Alors $f = f_1 - f_1(z_0) + v(z_0)$ répond à la question.

3) Comme suggéré on calcule sur Ω

$\frac{\partial(P-v)}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{Re}\, g - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

et $\frac{\partial(P-v)}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{Re}\left(i\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{Re}(ig) - \frac{\partial v}{\partial y}$
$= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

La fonction $P-v : \Omega \to \mathbb{R}$, différentiable sur l'ouvert Ω qui est connexe, a des dérivées partielles partout nulles. Elle est donc constante. Comme $(P-v)(z_0) = \mathrm{Re}[f(z_0)] - v(z_0) = 0$, elle est nulle.

B) 1) a) Supposons que ce soit faux. Pour tout $n \geq 1$ on peut donc prendre un $z_n \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tel que $|z_n| < 1 + \frac{1}{n}$ $(*)$.

Par compacité de $\overline{D_2}$ on peut extraire une sous-suite z_{n_k} convergente vers un $z \in \mathbb{C}$. Quand $k \to +\infty$, $n_k \to +\infty$ donc $1 + \frac{1}{n_k} \to 1$ et par passage à la limite dans $(*)$, $|z| \leq 1$ donc $z \in \overline{D_1}$.

Par ailleurs $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est fermé et chaque $z_{n_k} \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ donc $z \notin \Omega$.

Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle $\overline{D_1} \subset \Omega$.

b) v est harmonique sur le convexe non vide $D_{1+\varepsilon}$. Il suffit d'appliquer le A3.

② a) On utilise le cercle unité, orienté usuellement, paramétré par $t \mapsto e^{2i\pi t}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pour ce γ, $\mathrm{Ind}(0,\gamma) = 1$

La fonction f est holomorphe sur l'ouvert étoilé $D_{1+\varepsilon}$; on peut donc lui appliquer la formule de Cauchy :

$$f(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz$$

Or ici $\displaystyle \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz = \frac{1}{\cancel{2i\pi}}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{2i\pi t})}{\cancel{e^{2i\pi t}}}\,\cancel{2i\pi}\,\cancel{e^{2i\pi t}}\,dt.$

b) $\displaystyle u(0) = \mathrm{Re}\,[f(0)] = \mathrm{Re}\left[\int_0^1 f(e^{2i\pi t})\,dt\right]$

$$= \int_0^1 (\mathrm{Re}\, f)(e^{2i\pi t})\,dt = \int_0^1 u(e^{2i\pi t})\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$$

③ a) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/\bar\alpha\}$

$$|h_\alpha(z)| < 1 \iff \frac{|\alpha - z|}{|1-\bar\alpha z|} < 1 \iff |\alpha - z| < |1 - \bar\alpha z|$$

$$\iff |\alpha - z|^2 < |1-\bar\alpha z|^2 \iff (\alpha - z)(\bar\alpha - \bar z) < (1-\bar\alpha z)(1-\alpha\bar z)$$

$$\iff \alpha\bar\alpha - \cancel{z\bar\alpha} - \cancel{\bar z\alpha} + z\bar z < 1 - \cancel{\bar\alpha z} - \cancel{\alpha\bar z} + \alpha\bar\alpha z\bar z$$

$$\iff |\alpha|^2 + |z|^2 < 1 + |\alpha|^2|z|^2$$

$$\iff 0 < (1-|\alpha|^2)(1-|z|^2) \quad \text{or } |\alpha| < 1$$

$$\iff 0 < 1 - |z|^2 \iff |z|^2 < 1 \iff |z| < 1$$

Pour la deuxième équivalence, on remplace toutes les inégalités par des égalités.

b) L'ensemble proposé est $h_\alpha^{-1}(D_{1+\varepsilon})$ où h_α est continue sur $\mathbb{C} \setminus \{1/\bar{\alpha}\}$. C'est donc un ouvert de $\mathbb{C} \setminus \{1/\bar{\alpha}\}$. Or $\mathbb{C} \setminus \{1/\bar{\alpha}\}$ est lui-même un ouvert de $\mathbb{C}$, donc Ω_ε est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Vu le 3 a), si $|z| \leq 1$, $|h_\alpha(z)| \leq 1 < 1+\varepsilon$ donc $z \in \Omega_\varepsilon$, qui contient bien $\overline{D_1}$.

Sur Ω_ε, h_α est définie par définition et est à valeurs dans $D_{1+\varepsilon}$ où f est définie. La composée est donc définie. Elle est holomorphe comme composée d'holomorphes.

c) Posons $U_\alpha = \mathrm{Re}\,(f \circ h_\alpha)$. Elle est harmonique sur Ω_ε puisque $f \circ h_\alpha$ est holomorphe sur cet ouvert.

De plus pour $|z| = 1$, $|h_\alpha(z)| = 1$ vu le a) donc $U_\alpha(z) = \mathrm{Re}\left(f\,[h_\alpha(z)]\right) = (\mathrm{Re}\, f)\,[h_\alpha(z)] = u\,[h_\alpha(z)] = 0$

On peut donc appliquer le 2) b) à U_α sur Ω_ε

On obtient $U_\alpha(0) = 0$, autrement dit $u\,[h_\alpha(0)] = 0$

soit $u(\alpha) = 0$.

C) Oui. La fonction $z \mapsto \ln|z|$.