Corrigé de l'examen final

Exercice 1. 1. *faux. Prendre par exemple $z_1 = z_2 = -1$. Alors, $\theta_1 + \theta_2 = \pi + \pi = 2\pi$ mais $\theta = 0$.*

2. *Faux. Prendre par exemple γ le cercle unité, $\Omega = \dot{D}(0,2)$ le disque de rayon 2 privé de son centre et $f(z) = 1/z$.*
3. *Vrai. Sinon, il existerait une suite extraite de (z_n) qui converge vers un point $z \in \mathbb{C}$. Par continuité, on aurait $f(z) = 0$, c'est-à-dire que z serait un zéro non isolé de f. Et donc f serait identiquement nulle selon le principe des zéros isolés, ce qui contredit une hypothèse.*
4. *Faux. S'il existait un tel biholomorphisme $f : \mathbb{C} \to D$, ce serait une fonction entière et bornée, donc constante par le théorème de Liouville, ce qui est absurde.*

Exercice 2. 1. *f est le quotient de deux fonctions entières. Le seul zéro du dénominateur intérieur au rectangle considéré est $i\pi$, qui est simple. D'où,*

$$\mathrm{Res}(f, i\pi) = \frac{e^{ia\pi}}{e^{i\pi}} = -e^{ia\pi}$$

2. *Pour $y \in]0, 2\pi[$,*

$$|f(R+iy)| \leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1} = \frac{e^{(a-1)R}}{1 - e^{-R}}$$

D'où, lorsque $R \to +\infty$,

$$\left| \int_0^{2\pi} f(R+iy)dy \right| \leq 2\pi \frac{e^{(a-1)R}}{1 - e^{-R}} \to 0$$

De façon analogue,

$$|f(-R+iy)| \leq \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}}$$

D'où, lorsque $R \to +\infty$,

$$\left| \int_0^{2\pi} f(-R+iy)dy \right| \leq 2\pi \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \to 0$$

3. *L'intégrande f est continu sur $\mathbb{R}$. De plus, lorsque $x \to +\infty$, $f(x) \sim e^{(a-1)x}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et lorsque $x \to -\infty$, $f(x) \sim e^{ax}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_-$. Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$. La bande ouverte $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ : \ -\pi < \Im(z) < 3\pi\}$ est convexe donc étoilée, f y est holomorphe sauf au point $i\pi$ et le support de γ est inclus dans Ω. Ainsi, le théorème des résidus s'applique et on a*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \mathrm{Res}(f, i\pi) = -2i\pi e^{ia\pi}.$$

L'exponentielle étant $2i\pi$ périodique

$$\int_{[R+2i\pi, -R+2i\pi]} f(z)dz = -e^{2ia\pi} \int_{[-R,R]} f(x)dx$$

et donc, lorsque $R \to +\infty$,

$$(1 - e^{2ia\pi}) \int_{[-R,R]} f(x)dx + o(1) = -2i\pi e^{ia\pi}$$

En passant à la limite $R \to +\infty$, on déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{2i\pi e^{ia\pi}}{e^{2ia\pi} - 1} = \frac{2i\pi}{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

Exercice 3. 1. *Soit $b \in \mathbb{R}$ et $f(z) = \sin(z+b) - \sin(z)\cos(b) + \sin(b)\cos(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$. f est entière et s'annule sur $\mathbb{R}$. Par le principe des zéros isolés, f est nulle et l'égalité est établie pour $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{C}$. Fixons à présent $a \in \mathbb{C}$ et posons $g(z) = \sin(a+z) - \sin(a)\cos(z) + \sin(z)\cos(a)$ pour $z \in \mathbb{C}$. Nous venons de montrer que g s'annule sur $\mathbb{R}$. Par le principe des zéros isolés, g est nulle et l'identité demandée est établie pour tous nombres complexes a, b.*

2. *Pour $z = x + iy \in A$,*

$$\sin(\pi z) = \sin(\pi x + i\pi y) = \sin(\pi x)\cos(i\pi y) + \sin(i\pi y)\cos(\pi x) = \sin(\pi x)\cosh(\pi y) + i\sinh(\pi y)\cos(\pi x)$$

Comme $|y| \geq 2$, $\cosh(\pi y) \geq |\sinh(\pi y)| \geq \sinh(2\pi)$, d'où

$$|\sin(\pi z)|^2 = \sin(\pi x)^2\cosh(\pi y)^2 + \sinh(\pi y)^2\cos(\pi x)^2 \geq \sinh(2\pi)^2$$

et donc f est bornée dans A.

3. *f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ donc sur $\dot{D}(k,1)$. D'après le cours, elle y est développable en série de Laurent.*

4. *Soit $w = z - k$, de sorte que w tend vers 0 quand z tend vers k. Par définition du sinus,*

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi w)} = \frac{\pi^2}{(\pi w + O(w^3))^2} = \frac{1}{w^2(1+O(w^2))^2} = \frac{1}{w^2}\frac{1}{1+O(w^2)} = \frac{1}{w^2} + O(1)$$

lorsque $w \to 0$. Donc la partie principale de la série de Laurent de f sur le disque épointé $\dot{D}(k,1)$ est $\frac{1}{w^2} = \frac{1}{(z-k)^2}$.

5. *Soit $R > 1$ et $z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \cap D(0,R)$. Pour $k \geq 2R$,*

$$\frac{1}{|z-k|^2} \leq \frac{1}{(k-|z|)^2} \leq \frac{4}{k^2}$$

Ainsi, la série converge uniformément sur $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \cap D(0,R)$. Comme de plus chaque terme de la somme est holomorphe dans cet ouvert, leur somme l'est aussi. R étant arbitraire, g est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ tout entier.

6. *Soit $z = x + iy \in A$. Pour $k \in \{-1, 0, 1\}$, on a la minoration*

$$|z-k|^2 = (x-k)^2 + y^2 \geq y^2 \geq 4$$

Pour $|k| \geq 2$, comme $|x| \leq 1$,

$$|z-k|^2 = (x-k)^2 + y^2 \geq (|k|-1)^2$$

D'où,

$$|g(z)| \leq 12 + \sum_{|k| \geq 2} \frac{1}{(|k|-1)^2} < +\infty$$

7. *E est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et 1-périodique comme différence de deux fonctions qui le sont. De plus, pour z proche de $k \in \mathbb{Z}$, on sait que $f(z) = \frac{1}{(z-k)^2} + O(1)$ et $g(z) = \frac{1}{(z-k)^2} + O(1)$. Donc f est bornée au voisinage de k et donc y est prolongeable en une fonction holomorphe.*

8. *On a montré que f et g étaient bornées sur l'ensemble A, donc E l'est aussi. L'ensemble $B = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |\Re(z)| \leq 1, |\Im(z)| \leq 2\}$ est compact et E holomorphe donc continue y est bornée. Ainsi, E est bornée sur $A \cup B$ et par 1-périodicité sur $\mathbb{C}$ tout entier*

9. *Par le théorème de Liouville, E est constante. On vérifie aussi facilement que $\lim_{y\to+\infty} f(iy) = 0$ et (par convergence dominée par exemple) que $\lim_{y\to+\infty} g(iy) = 0$ donc $E = \lim_{y\to+\infty} E(iy) = 0$*