

Liste et description de projets

Ivan Gentil¹20 mai 2024

Voici une liste de projets. Normalement la rédaction du problème mathématique prend quelques pages. Il s'agit surtout d'être capable d'expliquer un problème, que ça soit à l'écrit ou bien à l'oral, au moment de la soutenance. Tous les projets reprennent des théorèmes classiques de licence ou bien des résultats qui ne sont pas trop enseignés. Certains projets sont difficiles, on n'est pas obligé de tout comprendre pour avoir une idée du sujet.

Si vous trouvez un projet qui n'est pas dans la liste, c'est aussi possible, il suffit de m'en parler. On pourra consulter des ouvrages de licence, wikipedia ou bien d'autres sites. Certains projets ont des étoiles, vous pouvez les prendre mais alors il faudra faire un effort pour comprendre les sujets qui traitent de choses difficiles.

L'ensemble des livres sont à la bibliothèque de mathématiques (Bâtiment Braconnier) ou bien sur le wiki de ce cours².

Le projet se fait a priori à deux.

1 Soutenance et mémoire

La soutenance correspond à un exposé d'au plus 25 minutes ainsi que 5 minutes de questions.

Voici quelques recommandations sur la soutenance, qu'il faut retenir et appliquer. Ce n'est pas forcément facile mais c'est indispensable.

- Il ne faut pas dépasser l'horaire. Pour cela il faut s'entraîner.
- Le public n'est pas forcément spécialiste, il faut faire en sorte que le public ne s'ennuie pas.
- Dans une soutenance, tous les participants doivent parler.
- Même en tant que spécialiste je peux apprendre en vous écoutant.
- La rédaction du problème mathématique (mémoire) prend quelques pages en Latex. Vous devez aussi ajouter quelques pages sur ce que vous avez compris des cours en Python.

2 Liste des projets

1. *Six preuves de l'infinité de l'ensemble des nombres premiers*, provenant du chapitre 1 de [AZ02].
Tout est dans le titre, il s'agit de montrer de plusieurs façon élégante l'infinité des nombres premiers, résultat classiquement attribué à Euclide.
2. ******* *Tout corps fini est commutatif*, provenant du chapitre 6 de [AZ02].
C'est dans le titre. Ce n'est pas si compliqué mais c'est long pour arriver au résultat.

1. Bureau 101B (Bâtiment braconnier), gentil@math.univ-lyon1.fr

2. http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=p23:s4_lectures:page

3. *Quelques nombres irrationnels*, provenant du chapitre 7 de [AZ02].

Tout est encore dans le titre, il s'agit de montrer que certain nombre réels sont irrationnels. Certains sont plus compliqués que d'autres. On peut commencer par montrer que e , e^2 et e^4 sont irrationnels.

4. *Trois méthodes pour calculer $\pi^2/6$* , provenant du chapitre 8 de [AZ02].

Projet plus analytique. Effectivement les méthodes sont très élégantes et simples ! Le bit est simplement de montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. *Ensembles, fonctions et hypothèse du continu*, provenant du chapitre 17 de [AZ02].

Principalement, il s'agit de démontrer élégamment que \mathbf{Q} est dénombrable et c'est déjà pas si mal.

6. *À la gloire des inégalités*, provenant du chapitre 18 de [AZ02].

On démontre à nouveau ce que l'on sait déjà, à savoir l'inégalité arithmético-géométrique mais de façon différente. Il y a aussi d'autres inégalités intéressantes à regarder dans ce chapitre.

7. **Le théorème fondamental de l'algèbre*, provenant du chapitre 19 de [AZ02].

Ce théorème dit simplement que tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe. Démonstration en seulement 2 pages, c'est remarquable.

8. *Les nombres premiers respect-t-il la parité ?*

Projet provenant de la page :

<https://images.math.cnrs.fr/Les-nombres-premiers-respectent-ils-la-parite.html>

Des remarques intéressante sur la parité, piste verte comme c'est expliqué sur le site. On pourra faire des simulations avec Python pour imaginer des propriétés sur la parité.

9. *Valeur approchée des racines de Héron*, cet algorithme se trouve facilement sur internet³.

Un algorithme pour calculer la racine carré d'un nombre réel. Il faudra expliquer la vitesse de convergence ce cet algorithme.

On pourra chercher d'autres exemple d'algorithme de cette forme

10. *Théorème de Bernstein*.

Approximer uniformément une fonction continue par des polynôme, c'est possible par les polynômes de Bernstein. On pourra consulter [Gou94, Exercice 7]. On pourra aussi consulter [Pom94], mais attention aux fautes !

Il s'agit de montrer que toute fonction continue peut-être approchée uniformément sur un segment par une suite de polynômes.

11. *Lemme de Césaro*

C'est un résultat bien connu mais la démonstration est souvent mal comprise. Etant donné que c'est un résultat simple il faudra aussi montrer des simulation sur Python !

On pourra consulter [CA02, Page 32 Section 2.7]

12. *Comparaison série et intégrales, constante d'Euler*.

Ce thème traite de la comparaison entre série et intégrale. L'exemple le plus classique montre l'existence de la constante d'Euler. On pourra consulter [Die68, Page 99, Section 11].

3. Provenant par exemple ici <https://images.math.cnrs.fr/Valeurs-approchees-des-racines.html>

13. *Formule d'Euler et polyèdres.*

Il s'agit ici de démontrer la célèbre formule d'Euler, reliant les sommets, les arêtes et les faces d'un polyèdre. C'est de la géométrie et on la trouve dans ce très beau livre [Aud98, Page 113, Section 4].

Ce théorème est relié avec le projet 22.

14. *Méthode de Newton.*

Déjà vu en Tp Python, il s'agit de montrer proprement la convergence. On pourra, par exemple consulter [Die68, Page 58]. Mais tout autre livre est aussi possible.

15. *Fonction Gamma.*

C'est la célèbre fonction qui permet de définir le factoriel d'un nombre réel. On peut s'intéresser à montrer la convexité de la fonction Γ ou bien d'autres jolies formules. On pourra par exemple consulter [CA02, Page 354] mais il y a beaucoup de livres sur le sujet.

16. *Raconte moi les quaternions*

On pourra consulter simplement Wikipedia ou bien le livre de votre choix ou même des vidéo sur youtube.

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternion>

17. *Raconte moi l'espace de Cantor*

On pourra consulter simplement Wikipedia ou bien le livre de votre choix ou même des vidéo sur youtube.

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble de Cantor](https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Cantor)

18. ****** *L'entropie en mathématique*

Mais que fait-on avec l'entropie en mathématique ? Voici un texte qui en parle que l'on trouvera sur internet sans difficultés, [Gen21]. Attention, il ne faut pas trop rentrer dans ce que l'on comprend pas.

19. *Formule de Stirling*

Montrer que

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Une méthode classique utilise les intégrales de Wallis, voir Wikipedia⁴ ou bien un autre livre.

20. ****** *Modèle proie-prédateur (ou équation de Lotka-Volterra)*

C'est un modèle qui permet de modéliser des espèces avec des proies et des prédateurs. Modèle clé pour comprendre la modélisation en biologie.

L'idée est d'expliquer le modèle que l'on trouve par exemple dans la section 3.2 de [Ber17] ou bien ici⁵ et d'expliquer l'existence d'une solution globale et périodique.

21. ***** *Théorème de Banach-Picard et espace complet*

Qu'est-ce qu'un espace complet ? Démonstration du théorème de Picard dans un espace métrique complet, on pourra consulter la page wikipedia qui explique l'ensemble :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Application_contractante

4. https://fr.wikipedia.org/wiki/Int%C3%A9grale_de_Wallis

5. https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quations_de_pr%C3%A9dation_de_Lotka-Volterra

22. *Théorème de Girard*

Ce théorème relie l'aire d'un triangle avec les angles du triangle dans une sphère. Mais comment définit-on un triangle dans une sphère ? Que sait-on sur la somme des angles d'un triangle sur une sphère ?

On trouvera des idées sur wikipedia sur les triangles sphériques et le théorème de Girard dans le document qui porte le même nom.

Ce théorème est relié avec le projet 13.

23. ****Le groupe fondamental*

Le groupe fondamental est le premier élément de la topologie algébrique. A un objet géométrique comme la sphère, le tore ou bien le cercle, on associe un groupe. Comment construit-on le groupe ? Peut-on trouver des exemples ?

Une belle vidéo en parle ici⁶

Vous pouvez trouver des éléments ailleurs mais il faut trouver des choses accessibles !

Références

- [Aud98] Michèle Audin. *Géométrie. De la licence à l'Agrégation*. Belin, Paris, 1998.
- [AZ02] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Raisonnements divins. Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes. Traduit de l'anglais par Nicolas Puech et Jean-Marie Morvan*. Paris : Springer, 2002.
- [Ber17] Florent Berthelin. *Équations différentielles*, volume 34 of *Enseign. Math., Cassini*. Paris : Cassini, 2017.
- [CA02] Jean-Yves Caby and Guy Auliac. *Analyse pour le CAPES et l'Agrégation interne*. Ellipse, Paris, 2002.
- [Die68] Jean Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Hermann, Paris, 1968.
- [Gen21] Ivan Gentil. L'entropie, de Clausius aux inégalités fonctionnelles. *Gaz. Math., Soc. Math. Fr.*, 168 :15–23, 2021.
- [Gou94] Xavier Gourdon. *Les maths en tête, Analyse*. Ellipse, Paris, 1994.
- [Pom94] Alain Pommellet. *Agrégation de Mathématiques, cours d'analyse*. Ellipse, Paris, 1994.

6. https://www.youtube.com/watch?v=3D6fQ1fdp1o&ab_channel=ScientiaEgregia