Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024

Compléments de Mathématiques

Fiche 5

INTÉGRALES MULTIPLES - CHANGEMENT DE VARIABLES

Exercice 1. Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $\iint_D x^2 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, où D est le carré $[0;1] \times [0;1]$,
2. $\iint_D \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{(x+y)^2}$, où D est le carré $[1;2] \times [3;4]$,
3. $\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq 2y \leq x\}$,
4. $\iint_D (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2\}$.

Exercice 2. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Pour tout $y > 0$, on pose $0^y = 0$. En calculant de deux manières différentes l'intégrale $\iint_D x^y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ où $D = [0;1] \times [a;b]$, déterminer la valeur de l'intégrale simple $J = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, \mathrm{d}x$.

Changement de variables

Exercice 3. (Le changement de variable en polaires) À l'aide d'un changement de variable en coordonnées polaires, déterminer les valeurs des intégrales suivantes :

1. $\iint_D (x+y)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, où D est le disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 1,
2. $\iint_D y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, où D est le demi-disque intersection du disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 3, avec le demi-plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y \geq 0\}$,
3. $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \geq 0, (x^2+y^2)^2 \leq x^2 - y^2\}$.

Exercice 4. (Calcul de l'intégrale de Gauss) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

1. Montrer que pour tout $R > 0$,
$$\iint_{\overline{B}_\infty(0_{\mathbb{R}^2}, R)} f(x,y) dx dy = 4 \left(\int_0^R e^{-t^2} dt \right)^2 .$$
2. Calculer pour tout $R > 0$, $\iint_{\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, R)} f(x,y) dx dy$.
3. Comparer pour $R > 0$, $\overline{B}_\infty(0_{\mathbb{R}^2}, R)$, $\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, R)$ et $\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, R\sqrt{2})$.
4. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 5. 1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Calculer l'aire de l'ellipse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

(justifier le changement de variables utilisé).

2. Soit $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y - x \leq 1, 0 \leq 2x - y \leq 1\}$.
   (a) Représenter graphiquement l'ensemble P.
   (b) Calculer l'intégrale double $\iint_P (2x^2 - 3xy + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, à l'aide du changement de variables $u = y - x$, $v = 2x - y$ que vous justifierez.

Exercice 6. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ l'ouvert donné par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x < y < 2x,\ x < y^2 < 2x\}$.

1. Montrer que l'application φ définie par
$$\varphi(x, y) = (\frac{x}{y}, \frac{y^2}{x}),$$
est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de D sur l'ouvert $V =]\frac{1}{2}, 1[\times[1, 2[$.

2. A l'aide de ce changement de variables, calculer
$$\iint_D \frac{y}{x} dxdy.$$

Exercice 7. Calculer par la méthode de Fubini en tranches (ou avec le changement en coordonnées cylindriques) puis par la méthode de Fubini en piles chacune des intégrales suivantes :

$$I_1 = \iiint_V xz\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \quad \text{et} \quad I_2 = \iiint_V x^2 z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

où $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z\}$.

Exercice 8. À l'aide d'un changement de variables en coordonnées sphériques, calculer l'intégrale

$$\iiint_B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

où B désigne la boule unité fermée de $\mathbb{R}^3$ et a un réel strictement supérieur à 1.