Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024

Compléments de Mathématiques

Fiche 1

Suites de fonctions

Exercice 1. Convergence simple et uniforme

On étudie les suites de fonctions réelles définies par $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{x}{x+n} + \arctan(x)$ et $g_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{nx}{1+nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent-elles simplement sur $[0,1]$?
2. Convergent-elles uniformément sur $[0,1]$? Sur $]0,1]$? Soit $a \in]0,1[$. Convergent-elles uniformément sur $[a,1]$?
3. Convergent-elles simplement et uniformément sur $[1,+\infty[$?

Exercice 2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2)\exp(-nx^2).$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Montrer que pour tout $a > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

Exercice 3. On considère la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$.

Exercice 4. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1[$ par

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer (si elle existe) la limite $\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x)$.
3. Que peut-on en conclure sur la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 5. Convergence et intégrales

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0,1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.

Exercice 6. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément convergente sur le segment $[a,b]$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[a,+\infty[$.
4. Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 7. Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3x^2 + 2n^2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{2}{n}\right] ; \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x.$$
3. En déduire que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 8. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies par

$$f_n:\begin{array}{ccc}[0,\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \cos^n(x)\sin(x).\end{array}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ définies par $g_n=(n+1)f_n$. Montrer que sur tout intervalle de la forme $\left[\delta,\dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $0<\delta<\dfrac{\pi}{2}$, $(g_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle, mais que pourtant, la suite
$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
ne tend pas vers 0.

Exercice 9. Convergence dominée

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\big(\tan(x)\big)^n\,\mathrm{d}x$,
2. $v_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^n+e^x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10. Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\arctan(nx)e^{-x^n}\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$.

Exercice 11. Déterminer la limite, quand $n\to+\infty$, de $\displaystyle\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathrm{d}x$.
Indication : on pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'inégalité $\ln(1+u)\leq u$ *pour tout* $u\geq 0$.

Exercice 12. Soit $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ continue et intégrable.
Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n\displaystyle\int_0^1\frac{f(nt)}{1+t}\mathrm{d}t$.

Exercice 13. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n\int_1^{+\infty}e^{-x^n}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$.

Exercice 14. Convergence uniforme et dérivées

Soit $(g_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par $g_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction nulle.
2. Étudier la convergence de $(g_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-1,1]$.
3. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par $f_n(x)=\dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers 0.

Exercice 15. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sqrt{n}\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

1. Étudier les modes de convergence de la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.