Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024

Compléments de Mathématiques

Fiche 0

SUITES ET SÉRIES À TERMES RÉELS OU COMPLEXES

Exercice 1. Montrer qu'une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si les suites réelles $(Re\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Im\, u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Exercice 2. Montrer qu'une suite complexe qui converge est bornée.

Exercice 3. Soit $z \in \mathbb{C}$.

a) Etudier la convergence de la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$z^n - 1 = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

c) Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} z^n$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ est convergente.

Exercice 5. Soit $(a, b, u_0) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 1$ et soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 qui satisfait la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Trouver $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda = a\lambda + b$.

b) Montrer que la suite $(u_n - \lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

c) Donner une expression explicite de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

e) Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

f) Sous quelles conditions la série de terme général u_n est-elle convergente?

Exercice 6. Étudier la convergence de la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}(n^2+k)^{-1/2}\right)_{n\geq 1}$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\arctan x$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0.

b) On suppose maintenant que $u_0 > 0$. Montrer que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

c) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 8. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, avec $c \neq 0$, et la fonction définie par

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}.$$

a) À quelle condition portant sur a, b, c, d, la fonction f a-t-elle deux points fixes? On suppose cette condition satisfaite dans la suite.

b) On se donne $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ qui n'est pas un point fixe de f, et la suite de premier terme z_0 et qui satisfait la relation de récurrence $z_{n+1} = f(z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tel que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\frac{z_n-\alpha}{z_n-\beta})_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite géométrique.

c) On pose $z_0 = i$ et $z_{n+1} = \frac{1}{1-z_n}$, pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et étudier sa convergence.

Exercice 9. Donner la nature de la série de terme général u_n (convergence absolue, semi-convergence, divergence, divergence grossière) avec

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}, \quad \forall n \geq 0;$
2. $u_n = \dfrac{1}{n+100}, \quad \forall n \geq 0;$
3. $u_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right), \quad \forall n \geq 1;$
4. $u_n = e^{-n}, \quad \forall n \geq 0;$
5. $u_n = (-1)^n e^{-\sqrt{n}}, \quad \forall n \geq 0;$
6. $u_n = 1 - \cos(\pi/n), \quad \forall n \geq 1;$
7. $u_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n \geq 1;$
8. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right), \quad \forall n \geq 0.$

Exercice 10. Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n v_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

a) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente si $\alpha > 1$, est semi-convergente si $0 < \alpha \leq 1$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, est divergente si $0 < \alpha \leq 1$ et $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ et est grossièrement divergente si $\alpha \leq 0$.

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Si la série de terme général u_n converge, montrer que $u_n \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{n})$.

Exercice 12. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner un encadrement du reste d'ordre n de cette série.

Exercice 13. Discuter en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ la nature de la série de terme général

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

Exercice 14. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = (n+1)3^{-n}$.

1. Écrire w_n comme le terme général du produit de Cauchy de deux séries réelles que l'on précisera.
2. En déduire l'existence et la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$.