Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023

Compléments de Mathématiques

Examen - le 16 mai 2023 - 2 heures

Seulement une partie des points sera attribuée à une réponse correcte sans justification complète.

Exercice 1. Soit $a > 1$. On note B la boule euclidienne de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$:

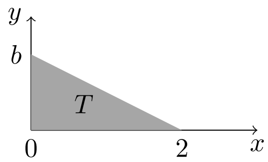
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Calculer l'intégrale

$$I = \int_B \Big(x^2 + y^2 + (z - a)^2\Big)^{-1/2} \, dx\, dy\, dz.$$

Exercice 2. Soit $b > 0$. On note $T \subset \mathbb{R}^2$ le triangle formé par l'origine $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ et les points $(2, 0) \in \mathbb{R}^2$ et $(0, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer l'intégrale

$$J = \int_T xy \, dx\, dy.$$



Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{1/2} \frac{t^x \cos(t)}{\ln(t)} \, dt.$$

On rappelle le critère de convergence pour les intégrales de Bertrand, qu'on pourra utiliser sans justification dans cet exercice:

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \text{ converge si et seulement si } \big(\ \alpha < 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)\big).$$

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer que F est dérivable sur son domaine de définition et calculer F'.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge simplement dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série de terme général u_n ne converge pas normalement dans $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $c > 0$. Montrer que la série de terme général u_n converge normalement dans $[c, +\infty[$.
4. Montrer que la série de terme général u_n ne converge pas uniformément dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ et calculer sa somme à l'aide de fonctions usuelles.