CONTRÔLE CONTINU

Jeudi 21 mars 2024

Durée : 1 heure et 45 minutes

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1 : Question de cours - (1,5 points)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies de I vers $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Énoncer le théorème de convergence dominée.

Exercice 2 - (6 points) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{n|x|}{x^2+n+3} \end{array}$$

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[a, b]$.

Exercice 3 (12,5 points)

1. On pose pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{ne^{-nx}}{n^2+1} := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$
   a) Montrer que le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est $\mathbb{R}^+$.
   b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$ ni sur $]0, +\infty[$.
   c) Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
   d) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
   e) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   f) Ecrire $\int_0^1 f(x)dx$ comme somme d'une série numérique convergente.
   g) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ où
$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n^2+1}.$$
   On pose $g := \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$.
   Montrer, en utilisant 1. , que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et exprimer g' en fonction de f.

Exercice 4 (4 points)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} z^n$,
2. $\sum_{n\geq 1} (1-\frac{1}{n})^{n^2} z^{3n}$.

Correction

Correction Exercice 2 :

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Deux cas :
   i) si $x_0 = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
   ii) si $x_0 \neq 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x_0) = \frac{n|x_0|}{x_0^2+n+3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n|x_0|}{n} = |x_0| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x_0|.$$

   Par suite, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. CVU de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$?
   On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{|n|x| - |x|x^2 - n|x| - 3|x|}{x^2+n+3}\right| = \frac{|x|(x^2+3)}{x^2+n+3} = \frac{|x|^3+3|x|}{x^2+n+3}.$$

   En posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = n$ $(\in \mathbb{R})$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{n^3+3n}{n^2+n+3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^2} = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0. \tag{1}$$

   Comme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|, \tag{2}$$

   on déduit de (1) et (2) que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.
   Par suite, $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrons que $(f_n)_n$ CVU vers f sur $[a, b]$.
   On a d'après 2)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \frac{|x|^3+3|x|}{x^2+n+3} \leq \frac{c^3+3c}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   où $c = \max(|a|, |b|)$.
   Par suite $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$.

Correction Exercice 3 :

1. On pose pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{ne^{-nx}}{n^2+1} := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

   a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est définie sur $\mathbb{R}$. Donc le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f n'est autre que le domaine de convergence simple de $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ i.e. $\left\{x \in \mathbb{R};\ \sum\limits_{n\geq1}^{+\infty} f_n(x) \text{ converge}\right\}$.
   Soit donc $x_0 \in \mathbb{R}$. Etudions la convergence de $\sum\limits_{n\geq1} f_n(x_0)$.

i) Si $x_0 < 0$, alors $|f_n(x_0)| = \frac{ne^{-nx_0}}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-nx_0}}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty \neq 0$ par croissance comparée (car $-x_0 > 0$).
Par conséquent, la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ diverge grossièrement.

ii) Si $x_0 \geq 0$, on a $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ est une série alternée car pour tout $n \geq 1$, $(-1)^n f_n(x_0) = -\frac{ne^{-nx_0}}{n^2+1} \leq 0$ donc garde un signe constant. On a de plus
α) $|f_n(x_0)| = \frac{ne^{-nx_0}}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{ne^{nx_0}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
et
β) Montrons que $(|f_n(x_0)|)_{n\geq 1}$ est décroissante.

1ère méthode : Soit $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : pour tout $y \geq 1$, $g(y) = \frac{y}{y^2+1}e^{-yx_0}$. La fonction g est décroissante sur $[1, +\infty[$.
En effet, g est C^1 sur $[1, +\infty[$ avec pour tout $y \geq 1$, $g'(y) = \frac{y^2+1-2y^2}{(y^2+1)^2}e^{-yx_0} - x_0 e^{-yx_0}\frac{y}{y^2+1} = \frac{1-y^2}{(y^2+1)^2}e^{-yx_0} - x_0\frac{y}{y^2+1}e^{-yx_0} \leq 0$ car $y \geq 1$ dont $1 - y^2 \leq 0$ et $x_0 \geq 0$.

D'où en particulier, pour tout $n \geq 1$, $g(n+1) = |f_{n+1}(x_0)| \leq g(n) = |f_n(x_0)|$ et donc $(|f_n(x_0)|)_{n\geq 1}$ est décroissante.

2ème méthode : $(\forall n \geq 1, |f_n(x_0)| > 0)$

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1,\ \frac{|f_{n+1}(x_0)|}{|f_n(x_0)|} &= \frac{n+1}{n}\frac{e^{nx_0}}{e^{(n+1)x_0}}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \\
&= e^{-x_0}\frac{n^3+n+n^2+1}{n^3+2n^2+2n} \\
&\leq e^{-x_0}\frac{n^3+n^2+2n}{n^3+2n^2+2n} \qquad (3) \\
&< e^{-x_0} \leq 1.
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans (3) le fait que $n \geq 1$.
D'où $\forall n \geq 1$, $|f_{n+1}(x_0)| \leq |f_n(x_0)|$.

Par suite, pour tout $x_0 \geq 0$, $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ vérifie le CSSA donc converge (ce qui n'est autre aussi que la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}^+$) et on a de plus
$\forall n \geq 1,\ |R_n(x_0)| \leq |f_{n+1}(x_0)|$.

On déduit de i) et ii) que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$.

b) Montrons que $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement ni sur $\mathbb{R}^+$ ni sur $]0, +\infty[$.
1ère méthode :
Prenons pour tout $n \geq 1$, $x_n = \frac{1}{n}$. On a $\forall n \geq 1$, $x_n \in]0, +\infty[$ avec

$$\sum_{n\geq 1} |f_n(x_n)| = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+1}e^{-1}$$

diverge car $\forall n \geq 1,\ 0 \leq |f_n(x_n)| = \frac{n}{n^2+1}e^{-1} \underset{+\infty}{\sim} e^{-1}\frac{1}{n}$ avec $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ série de Riemann divergente car $\alpha = 1 \leq 1$.
Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sup_{x>0}|f_n(x)| \geq |f_n(x_n)|,$$

on déduit que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sup_{x>0}|f_n(x)|$ diverge càd $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0,+\infty[$ et donc ne converge pas normalement non plus sur $\mathbb{R}^+ \supset]0,+\infty[$.

2ème méthode :
On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \sup_{x>0}|f_n(x)| = \sup_{x>0}\frac{ne^{-nx}}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}. \tag{4}$$

où on a utilisé le fait que $x \mapsto e^{-nx}$ est continue, décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente car $\alpha = 1 \leq 1$, on déduit de (4) que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sup_{x>0}|f_n(x)|$ diverge et donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0,+\infty[$ et donc ne converge pas normalement non plus sur $\mathbb{R}^+ \supset]0,+\infty[$.

c) Soit $a > 0$. Montrons que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ CVN sur $[a,+\infty[$.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \sup_{x\geq a}|f_n(x)| = \sup_{x\geq a}\frac{ne^{-nx}}{n^2+1} = \frac{ne^{-na}}{n^2+1} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{n^2}) \tag{5}$$

où on a utilisé le fait que $x \mapsto e^{-nx}$ est continue, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\frac{ne^{-na}}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{e^{na}} = 0$ par croissance comparée.
Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge car série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (5) que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sup_{x\geq a}|f_n(x)|$ converge, ce qui n'est autre que la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $[a,+\infty[$.

d) Montrons que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ CVU sur $\mathbb{R}^+$.

Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$ d'après a), montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ CVU sur $\mathbb{R}^+$ revient à montrer que la suite de fonctions restes $(R_n)_{n\geq 1}$ CVU vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.
Montrons alors que $(R_n)_{n\geq 1}$ CVU vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.
Comme, d'après a) toujours, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \geq 0$, $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$ i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \sup_{x\geq 0}|R_n(x)| \leq \sup_{x\geq 0}|f_{n+1}(x)|, \tag{6}$$

il suffit de montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ CVU vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.
On a

$$\forall n \geq 1, 0 \leq \sup_{x\geq 0}|f_n(x)| = \sup_{x\geq 0}\frac{ne^{-nx}}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

où on a utilisé le fait que $x \mapsto e^{-nx}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. D'où $\sup_{x\geq 0} |f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc $(f_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.
On a alors d'après (6), $(R_n)_{n\geq 1}$ CVU aussi vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.
Par suite, $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVU sur $\mathbb{R}^+$.

e) On a

   i) Pour tout $n \geq 1$, f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ car exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
   ii) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ d'après 1.d).

   Par suite, d'après le théorème de continuité de la fonction somme d'une série de fonctions, f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

f) Comme $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ daprès 1.d), donc en particulier elle converge uniformément sur le segment $[0, 1]$.
D'autre part, pour tout $n \geq 1$, f_n est continue sur ce segment.
Par conséquent, nous pouvons appliquer le théorème d'inversion de somme et intégrale sur un segment et on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &:= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)(x)dx \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} \frac{ne^{-nx}}{n^2+1} dx \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+2} \frac{(e^{-n}-1)}{n^2+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1-e^{-n})}{n^2+1}
\end{aligned}
$$

g) **1ère méthode :**
On va appliquer le théorème d'interversion de somme et limite.
Considérons $A = \mathbb{R}^+$ non majorée, on peut donc essayer d'appliquer ce théorème pour trouver la limite de f en $+\infty$.

   i) Montrons que pour tout $n \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ existe et est finie.
   Soit $n_0 \geq 1$.

$$\forall x \geq 0,\ 0 \leq |f_{n_0}(x)| = \frac{n_0}{e^{n_0 x}(n_0^2+1)} \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \in \mathbb{R}.$$

   ii) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $A = \mathbb{R}^+$ d'après 1.d).

   Par suite, d'après le théorème d'interversion de somme et limite, f admet une limite finie en $+\infty$ et on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0\ .$$

2ème méthode : On a pour tout $n \geq 1$, $f = S_n + R_n$ sur $\mathbb{R}^+$ (avec $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$)
Donc en particulier pour $n = 1$, on a $f = S_1 + R_1$ sur $\mathbb{R}^+$ et donc

$$\forall x \geq 0,\ f(x) = f_1(x) + R_1(x) = \frac{e^{-x}}{2} + R_1(x). \tag{7}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{2} = 0$ et que d'après le CSSA dans a), on a

$$\forall x \geq 0,\ |R_1(x)| \leq |f_2(x)| = \frac{2e^{-2x}}{5} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

et on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} R_1(x) = 0$.
Par suite, en passant à la limite quand $x \to +\infty$ dans (7), on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f_1(x) + \lim_{x\to+\infty} R_1(x) = 0.$$

2. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ où

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n^2+1}.$$

On pose $g := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n$.

i) On a pour tout $n \geq 1$, g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (même sur $\mathbb{R}$) car exponentielle est C^1 sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \geq 0,\ g_n'(x) = (-1)^{n+1} \frac{ne^{-nx}}{n^2+1} = f_n(x).$$

ii) La série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} g_n(0)$ converge car

$$\forall n \geq 1,\ |g_n(0)| = \frac{1}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}. \tag{8}$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (8) que $\sum\limits_{n\geq 1} g_n(0)$ converge.

Remarque : On aurait pu montrer dans ii) que $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

En effet, soit $x_0 \geq 0$. On a

$$\forall n \geq 1,\ |g_n(x_0)| = \frac{1}{(n^2+1)e^{nx_0}} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{n^2}) \tag{9}$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \frac{1}{e^{nx_0}(n^2+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{nx_0}} = 0$.
Comme $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (9) que $\sum\limits_{n\geq 1} g_n(x_0)$ converge pour tout $x_0 \geq 0$ et donc $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ CVS sur $\mathbb{R}^+$.

iii) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n' = \sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ d'après 1.,d).

Par suite, d'après le théorème de dérivation de la fonction somme d'une série de fonctions, on a g est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (en particulier ça implique la convergence simple de $\sum_{n\geq 1} g_n$ sur $\mathbb{R}^+$) et on a

$$\forall x \geq 0, \quad g'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x).$$

D'où $g' = f$ sur $\mathbb{R}^+$.

Correction Exercice 4 :

1. Rayon de convergence de la SE $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} z^n = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$.

   Comme pour tout $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} \neq 0$, on peut appliquer la règle de d'Alembert. On a

$$\forall n \geq 1, \ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \frac{\sqrt{(2n)!}}{\sqrt{(2n+2)!}} = \frac{n+1}{4\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{8n} = \frac{1}{8} \underset{n\to+\infty}{\to} l = \frac{1}{8}.$$

   Par suite, d'après la règle de D'Alembert, le rayon de convergence de cette série entière est $R = \frac{1}{l} = 8$.

2. Rayon de convergence de la SE $\sum_{n\geq 1} (1 - \dfrac{1}{n})^{n^2} z^{3n} := \sum_{n\geq 1} a_n z^{3n}$. Il s'agit ici d'une série lacunaire.

   1ère méthode : Notons R son rayon de convergence et R_1 le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$.

   On sait que $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_1$ et diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R_1$.

   En posant $U = z^3$ on a donc $= \sum_{n\geq 1} a_n z^{3n} = \sum_{n\geq 1} a_n U^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z^3| = |z|^3 < R_1$ et diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|^3 > R_1$.

   D'où $\sum_{n\geq 1} a_n z^{3n}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \sqrt[3]{R_1}$ (donc $R \geq \sqrt[3]{R_1}$) et diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \sqrt[3]{R_1}$ (donc $R \leq \sqrt[3]{R_1}$).

   Par suite
$$R = \sqrt[3]{R_1}. \tag{10}$$

   Calculons R_1.

   On va appliquer la règle de Cauchy :

$$\forall n \geq 1, \ \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{(1 - \frac{1}{n})^{n^2}} = (1 - \frac{1}{n})^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{n})} \underset{n\to+\infty}{\to} l_1 = \frac{1}{e}$$

   où on a utilisé le fait que $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ et donc $\ln(1-\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$ (car $u = -\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$). D'où $n\ln(1-\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} -1 \underset{n\to+\infty}{\to} -1$. Comme exponentielle est continue, on déduit alors que $\lim_n e^{n\ln(1-1/n)} =$

$e^{\lim_n (n \ln(1-\frac{1}{n}))} = e^{-1}$.
Par suite
$$R_1 = \frac{1}{l_1} = e. \tag{11}$$

Conclusion : On en déduit de (10) et (11) que
$$R = \sqrt[3]{R_1} = \sqrt[3]{e}.$$

2ème méthode :
On va appliquer la règle de Cauchy pour les séries numériques.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Notons $\sum_{n\geq 1} a_n z^{3n} = \sum_{n\geq 1} u_n$. On a
$$\forall n \geq 1,\ \sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|(1-\frac{1}{n})^{n^2} z^{3n}|} = (1-\frac{1}{n})^n |z^3| = e^{n\ln(1-1/n)}|z|^3 \underset{n\to+\infty}{\to} l = \frac{1}{e}|z|^3$$

(même justification pour $\lim_n (1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$ que celle dans la 1ère méthode).
On en déduit alors de la règle de Cauchy pour les séries numériques que $\sum_{n\geq 1} a_n z^{3n}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $l = \frac{|z|^3}{e} < 1$ et diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $l = \frac{|z|^3}{e} > 1$.

Par suite, $\sum_{n\geq 1} a_n z^{3n}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \sqrt[3]{e}$ (donc $R \geq \sqrt[3]{e}$) et diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \sqrt[3]{e}$ (donc $R \leq \sqrt[3]{e}$).

D'où $R = \sqrt[3]{e}$.