Correction de l'examen du 16 mai 2023

Exercice 1. Soit $a > 1$. On note B la boule euclidienne de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Calculer l'intégrale

$$I = \int_B \Big((x^2 + y^2 + (z - a)^2\Big)^{-1/2} dx\, dy\, dz.$$

On passe en coordonnées sphériques: on pose

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \Big(r \sin(\varphi) \cos(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\varphi)\Big),$$

et d'après le cours Φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[$ vers $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times 0 \times \mathbb{R})$. On pose

$$U = \Phi^{-1}(B),$$

de sorte que U est l'ensemble des paramètres (r, θ, φ) qui décrivent la boule unité dans $\mathbb{R}^3$. On a donc

$$U =]0, 1[\times] - \pi, \pi[\times]0, \pi[.$$

Le fait qu'il manque dans $\Phi(U)$ l'intersection de la sphère B avec un demi-plan est sans conséquence dans le calcul de l'intégrale (cf la théorie de l'intégale de Lebesgue en L3).

En notant

$$f(x, y, z) = \Big((x^2 + y^2 + (z - a)^2\Big)^{-1/2},$$

on a par le théorème de changement de variables l'égalité:

$$\int_B f(x, y, z) dxdydz = \int_{\Phi(U)} f(x, y, z) dxdydz = \int_U f(\Phi(r, \theta, \varphi)) r^2 \sin(\varphi) dr d\theta d\varphi. \tag{1}$$

On calcule

$$\begin{aligned} f(\Phi(r, \theta, \varphi)) &= \Big((r \sin(\varphi) \cos(\theta))^2 + (r \sin(\varphi) \sin(\theta))^2 + (r \cos \varphi - a)^2\Big)^{-1/2} \\ &= \Big(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi)\Big)^{-1/2}. \end{aligned}$$

À r fixé la fonction

$$\theta \longrightarrow \frac{r^2 \sin(\varphi)}{\Big(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi)\Big)^{1/2}}$$

est la dérivée de la fonction

$$\theta \longrightarrow \frac{r}{a} \cdot \Big(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi)\Big)^{1/2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_U f(\Phi(r, \theta, \varphi)) r^2 \sin(\varphi) dr d\theta d\varphi &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin(\varphi)}{\Big(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi)\Big)^{1/2}} d\theta\right) d\varphi dr \\ &= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left[\frac{r}{a} \cdot \Big(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi)\Big)^{1/2}\right]_0^{\pi}\right) d\theta dr. \end{aligned}$$

On calcule

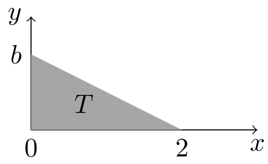
$$\begin{aligned} \left[\frac{r}{a} \cdot \Big(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\varphi)\Big)^{1/2}\right]_0^{\pi} &= \frac{r}{a} \cdot (r^2 + a^2 + 2ar)^{1/2} - (r^2 + a^2 - 2ar)^{1/2} \\ &= \frac{r}{a} \cdot \big(|r + a| - |r - a|\big). \end{aligned}$$

Comme $0 < r < 1 < a$, on a $|r+a| = r+a$ et $|r-a| = a-r$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_U f(\Phi(r,\theta,\varphi))r^2\sin(\varphi)drd\theta d\varphi &= \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2r^2}{a}d\theta dr \\
&= \frac{2\pi}{a}\int_0^1 2r^2 \qquad = \frac{4\pi}{3a}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $b > 0$. On note $T \subset \mathbb{R}^2$ le triangle formé par l'origine $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ et les points $(2,0) \in \mathbb{R}^2$ et $(0,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer l'intégrale

$$J = \int_T xy\,dx\,dy.$$



On intégre par exemples suivant des segments verticaux. L'équation de la droite qui contient le segment non vertical et non horizontal du triangle T est

$$y = b - \frac{b}{2}x,$$

donc

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^2 x\left(\int_0^{b-\frac{b}{2}x} ydy\right)dx \\
&= \int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}\big(b-\frac{b}{2}x\big)^2dx,
\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\int_0^2 x\big(b^2+\frac{b^2}{4}x^2-b^2x\big) \\
&= \frac{b^2}{2}\int_0^2(1+\frac{1}{4}x^3-x^2)dx.
\end{aligned}$$

On calcule

$$\int_0^2(1+\frac{1}{4}x^3-x^2)dx = 2+\frac{1}{4\cdot 4}2^4-\frac{1}{3}2^3 = \frac{1}{3},$$

et donc

$$J = \frac{b^2}{6}.$$

Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{1/2}\frac{t^x\cos(t)}{\ln(t)}\,dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer que F est dérivable sur son domaine de définition et calculer F'.

---

1. Pour tout $0 < a < 1/2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$t \longrightarrow \frac{t^x\cos(t)}{\ln(t)} = \frac{e^{x\ln(t)}\cdot\cos(t)}{\ln(t)}$$

est continue sur $[a,1/2]$. Donc la question de la convergence de l'intégrale ne se pose qu'en 0. On remarque que la fonction à intégrer est négative près de 0, et que

$$\frac{t^x\cos(t)}{\ln(t)} \sim \frac{1}{t^{-x}\ln(t)}, \qquad t\sim 0.$$

Par comparaison avec une intégrale de Bertrand, on a donc convergence si et seulement si $x > -1$, si bien que le domaine de définition de F est $]-1,+\infty[$.

2. On cherche à appliquer le théoréme de continuité sous le signe intégral. Pour tout $t\in]0,1/2[$, la fonction $x\to\frac{e^{x\ln(t)}\cdot\cos(t)}{\ln(t)}$ est continue sur $]-1,+\infty[$. Il s'agit de trouver une fonction majorante qui ne dépend pas de x et dont l'intégrale converge.

Pour $x\geq 0$, la fonction $t\to e^{x\ln(t)}$ est croissante sur $]0,1/2[$, et donc

$$0\leq e^{x\ln(t)}\leq 1,\qquad x\geq 0,\ t\in]0,1/2[,$$

si bien que (en majorant la valeur absolue du cosinus par 1)

$$\left|\frac{e^{x\ln(t)}\cdot\cos(t)}{\ln(t)}\right|\leq\frac{1}{|\ln(t)|}=g(t),\qquad x\geq 0,\ t\in]0,1/2[,$$

et l'intégrale de g sur $]0,1/2[$ est une intégrale de Bertrand convergente. Cela prouve la continuité de F sur $\mathbb{R}_+$.

Soit maintenant $x\in]-1,0[$. Le raisonnement précédent ne fonctionne plus puisque $t\to t^x$ est maintenant une fonction décroissante, qui tend vers $+\infty$ en 0.

Mais prouver la continuité de F sur $]-1,0[$, c'est prouver la continuité en tout $x_0\in]-1,0[$. Soit donc $x_0\in]-1,0[$, et $\alpha\in]-1,x_0[$. Pour $t\in]0,1/2[$,

$$\ln(t)>0,\quad\text{donc}\quad x_0\ln(t)<\alpha\ln(t)\quad\text{donc}\quad e^{x_0\ln(t)}\leq e^{\alpha\ln(t)},$$

si bien que

$$\left|\frac{e^{x\ln(t)}\cdot\cos(t)}{\ln(t)}\right|\leq\frac{e^{\alpha\ln(t)}}{|\ln(t)|}=\frac{1}{t^{-\alpha}\ln(t)},$$

et la fonction majorante ne dépend pas de x et a une intégrale sur $]0,1/2[$ qui est une intégrale de Bertrand convergente. Donc F est continue en x_0, et finalement F est continue sur $]-1,0[$, et donc finalement sur $]-1,+\infty[$.

3 On cherche à appliquer le théoréme de dérivation sous le signe intégral. Pour tout t fixé dans $]0,1/2[$, la fonction $x\to\frac{e^{x\ln(t)}\cdot\cos(t)}{\ln(t)}$ est C^1 sur $]-1,+\infty[$, de dérivée

$$x\to t^x\cos(t).$$

Pour $x\geq 0$, on a la majoration

$$|t^x\cos(t)|\leq 1,$$

et l'intégrale sur $]0,1/2[$ de la fonction constante $t\to 1$ est bien sûr convergente. Cela prouve que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et

$$F'(x)=\int_0^{1/2}t^x\cos(t)\,dt.\tag{2}$$

Pour x_0 fixé dans $]-1,0[$, on raisonne comme à la question précédente. On se donne α tel que $-1<\alpha<x_0$, et on majore

$$|t^x\cos(t)|\leq t^\alpha.$$

L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^{1/2}t^\alpha\,dt$ converge. On en déduit que F est dérivable sur $]-1,+\infty[$ tout entier et que (2) s'étend de $\mathbb{R}_+$ à $]-1,+\infty[$.

Exercice 4. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x)=n^2x^2e^{-nx}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge simplement dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série de terme général u_n ne converge pas normalement dans $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $c>0$. Montrer que la série de terme général u_n converge normalement dans $[c,+\infty[$.
4. Montrer que la série de terme général u_n ne converge pas uniformément dans $\mathbb{R}_+$.

---

1. Pour $x = 0$, on a $u_n(0) = 0$ pour tout n, et la série dont tous les termes sont nuls converge trivialement. Pour $x > 0$,

$$u_n(x) = o(1/n^2),$$

par croissances comparées. Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge.

2. À n fixé, on étudie les variations de la fonction $x \to u_n(x)$. On calcule:

$$u_n'(x) = e^{-nx}\big(2n^2x - n^3x^2\big),$$

si bien que u_n est croissante sur $[0, 2/n]$, et décroissante sur $[2/n, +\infty[$. Donc

$$\sup_{\mathbb{R}_+} u_n = u_n(2/n) = \frac{1}{4}e^{-2},$$

et la série de terme général constant égal à $\frac{1}{4}e^{-2}$ diverge trivialement (le terme général ne tend pas vers 0), ce qui signifie que la série de terme général u_n ne converge pas normalement dans $\mathbb{R}_+$.

3. Dès que $c > 2/n$, c'est-à-dire $n > 2/c$, la fonction $x \to u_n(x)$ est décroissante sur $[c, +\infty[$, et donc

$$\sup_{x\in[c,+\infty[} u_n(x) \leq u_n(c), \qquad n > 2/c,$$

et la série de terme général $u_n(c)$ converge d'après la première question. Donc la série de terme général u_n converge normalement dans $[c, +\infty[$.

4. Soit R_n le reste d'ordre n, défini pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par

$$R_n(x) = \sum_{k\geq n} u_k(x).$$

Prouver le défaut de convergence uniforme de la série sur $\mathbb{R}_+$, c'est prouver que la suite $\big(\sup_{x\in\mathbb{R}_+} R_n(x)\big)$ ne tend pas vers 0. Les valeurs absolues ne sont pas nécessaires car $R_n(x) > 0$ pour $x > 0$.
On cherche donc à minorer le reste. Comme tous les termes sont positifs, on a

$$R_n(x) \geq u_n(x).$$

Et donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} R_n(x) \geq \sup_{x\in\mathbb{R}_+} u_n(x) = \frac{1}{4}e^{-2},$$

ce qui prouve bien que la suite $\big(\sup_{x\in\mathbb{R}_+} R_n(x)\big)$ ne tend pas vers 0.

Exercice 5. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}x^n$ et calculer sa somme à l'aide de fonctions usuelles.

On pose $a_n = \frac{n-1}{n!}$ (suite strictement positive à partir du rang 2). Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{n-1}{n(n-2)}$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc le rayon de convergence de la série entiére $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!}x^n$ est infini. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n-1}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!}x^n - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}x^n,$$

et on peut passer à la limite dans le membre de gauche dans l'égalité ci-dessus d'après ce qui précède, et aussi dans le membre de droite par un argument similaire (les deux séries entières dans le membre de droite ont un rayon de convergence infini). On obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

D'une part

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et d'autre part en faisant un changement d'indice

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = xe^x.$$

Finalement,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n = (x-1)e^x.$$