
CC1 - le 2 mars 2023 - 1h30

CORRECTION

Exercice 1. Soit la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{|x| + n + 1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Cela signifie que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

---

2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = n$. On observe que $f_n(x_n) = n/(2n + 1)$. La suite $(f_n(x_n))$ converge donc vers $1/2$. Cela implique que (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle. En effet, sinon, pour $\varepsilon = 1/4$, on aurait N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{4}.$$

En particulier, pour tout $n \geq N$, on aurait $|f_n(x_n)| \leq 1/4$. Mais cela est faux pour n assez grand, car $(f_n(x_n))$ converge vers $1/2$.

---

3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) dans $[a, b]$.

L'argument précédent ne fonctionne plus, car pour n assez grand, $x_n = n$ n'appartient pas à $[a, b]$. On va montrer que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a, b]$. En effet, pour tout $x \in [a, b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{\max(|a|, |b|}{\min(|a|, |b|) + n + 1}.$$

Le majorant ne dépend pas de x, et converge vers 0 quand $n \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \frac{\max(|a|, |b|}{\min(|a|, |b|) + n + 1} \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$,

$$|f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

On vient de prouver la convergence uniforme de (f_n) vers la fonction nulle dans $[a, b]$.

Exercice 2. Soit la suite de fonctions $g_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \dfrac{nx}{n|x| + 1}$, pour tout $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence uniforme de (g_n) dans $[-1, 1]$.

On commence par la convergence simple. À x fixé dans $[-1, 1]$, la suite $(g_n(x))$ converge vers $x/|x|$ si $x \neq 0$, et vers 0 si $x = 0$. C'est-à-dire: (g_n) converge simplement vers la fonction

$$x \to \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas continue sur $[-1, 1]$. Pour tout n, la fonction g_n est continue. Donc il n'est pas possible que (g_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$.

Exercice 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(x^2 \sqrt{n})}{n^2}$. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, est continue et dérivable et donner une expression de F'.

- *F est bien définie sur* $\mathbb{R}$: il s'agit de vérifier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de terme général f_n, avec $f_n(x) = \frac{\cos(x^2 \sqrt{n})}{n^2}$. On majore

  $$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2},$$

  et $1/n^2$ est le terme général d'une série de Riemann convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $f_n(x)$ est donc absolument convergente pour tout x, donc convergente.

- *F est bien continue sur* $\mathbb{R}$: il suffit de vérifier que la série de terme général f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Pour cela, il suffit de vérifier que la convergence est normale sur $\mathbb{R}$. On majore

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2},$$

et $1/n^2$ est le terme général d'une série de Riemann convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général f_n est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc uniformément convergente.

- *F est dérivable:* comme on sait que la série de terme général $f_n(x)$ converge pour tout x, il suffit de vérifier que la série de terme général f_n' converge uniformément sur tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Cela prouvera que F est dérivable sur tout intervalle $[a,b]$, et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier. On calcule

$$f_n'(x) = \frac{-2x\sqrt{n}\sin(x^2\sqrt{n})}{n^2},$$

et pour $x \in [a,b]$, on majore

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n'(x)| \leq \frac{2\max(|a|,|b|)}{n^{3/2}}.$$

La série de terme général $n^{-3/2}$ est une série de Riemann convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $f;_n$ est donc normalement convergente sur $[a,b]$, donc uniformément convergente.

- *Expression de F'* : par convergence uniforme de la série des dérivées et un résultat du cours, la dérivée de F est égale à la somme des dérivées, si bien que

$$F'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{-2x\sqrt{n}\sin(x^2\sqrt{n})}{n^2}.$$

Exercice 4. Soit $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la suite de fonctions définie par $u_n(x) = \dfrac{e^{-n^2x^2}}{1+n^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge simplement dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On majore

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2},$$

d'où la convergence absolue pour tout x par comparaison à une série de Riemann convergente.

On note U la somme de la série, si bien que $U(x) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{e^{-n^2x^2}}{1+n^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note (comme d'habitude) u_n' la dérivée de la fonction $x \to u_n(x)$. Montrer que la série de terme général u_n' ne converge pas normalement dans $\mathbb{R}$.

On calcule

$$u_n'(x) = \frac{-2xn^2 e^{-n^2x^2}}{1+n^2}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

En particulier,

$$|u_n'(1/n)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n'(x)|,$$

et la suite minorante est

$$|u_n'(1/n)| = \frac{2ne^{-1}}{1+n^2} \sim \frac{2e^{-1}}{n}.$$

La série de Riemann (dite harmonique) $1/n$ est divergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $|u_n'(1/n)|$ est donc divergente. La série positive de terme général $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n'(x)|$ est minorée par une série positive divergente, donc diverge.

---

3. Soit $a > 0$. Montrer que la série de terme géneral u_n' converge uniformément dans $[a, +\infty[$.

Il suffit de prouver la convergence normale dans $[a, +\infty[$. Le raisonnement précédent ne fonctionne plus puisque pour n assez grand, $1/n$ n'appartient pas à $[a, +\infty[$. On considère

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |u_n'(x)| = \sup_{x\in[a,+\infty[} \frac{2xn^2 e^{-n^2x^2}}{1+n^2}.$$

Étude de la fonction $v_n : x \to xe^{-n^2x^2}$ dans $\mathbb{R}_+$. La fonction v_n est dérivable et

$$v_n'(x) = e^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2).$$

Donc v_n' est positive pour $x \in [a, 1/(n\sqrt{2})]$, puis négative pour $x \geq 1/(n\sqrt{2})$, si bien que le maximum de v_n est atteint en $x_n = 1/(n\sqrt{2})$. En particulier, pour n tel que $1/(n\sqrt{2}) \leq a$, la fonction v_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. Donc pour $n \geq 1/(a\sqrt{2})$,

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |u_n'(x)| = \frac{2an^2}{e^{-n^2a^2}} 1 + n^2 \leq 2ae^{-n^2a^2}.$$

Pour $a > 0$, la série de terme général $e^{-n^2a^2}$ est convergente, par exemple parce qu'elle est majorée par la série géométrique convergente de terme général e^{-na^2}. Donc la série de terme général u_n' converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

---

4. En déduire une expression pour $U'(x)$, pour tout $x \neq 0$.

Par convergence uniforme de la série des dérivées u_n' dans $[a, \infty[$ et un résultat du cours, la dérivée de U est égale à la somme des dérivées:

$$U'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{-2xn^2 e^{-n^2x^2}}{1+n^2}, \qquad \text{pour tout } x \in [a, +\infty[.$$

Comme $a > 0$ est arbitraire, l'expression ci-dessus est valable pour tout $x > 0$. Par parité de U, l'expression ci-dessus est finalement valable pour tout $x \neq 0$.

---

5. Étudier la limite $\lim_{x\to 0} U'(x)$.

Pour se faire une idée, on peut commencer par simplifier l'expression de U' : pour n assez grand, $n^2/(1+n^2)$ est proche de 1. Donc la question posée est proche de la question de la limite

$$\lim_{x\to} x \sum_{n\geq 0} e^{-n^2x^2}.$$

Quand x s'approche de 0, la décroissance de la suite $(e^{-n^2x^2})_n$ est de plus en plus lente, si bien que la somme de la série de plus en plus grande. On va comparer à une intégrale pour rendre cette idée plus précise. À $x > 0$ fixé, par décroissance de $t \to e^{t^2x^2}$, on a

$$\int_n^{n+1} e^{-t^2x^2}\, dt \leq e^{-n^2x^2} \int_{n-1}^{n} e^{-t^2x^2}\, dt.$$

Donc, par sommation et relation de Chasles,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\, dt \leq \sum_{n\geq 0} e^{-n^2x^2},$$

et

$$\sum_{n\geq 1} e^{-n^2x^2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\, dt,$$

si bien que finalement

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\, dt \leq \sum_{n\geq 0} e^{-n^2x^2} \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\, dt.$$

On fait le changement de variable $s = tx$ dans l'intégrale, pour trouver

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\, dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds,$$

qui est une intégrale de Riemann convergente. On a donc

$$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds \leq \sum_{n\geq 0} e^{-n^2x^2} \leq 1 + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds.,$$

si bien qu'en utilisant le théorème de limite par encadrement, on trouve

$$\lim_{x\to 0} x \sum_{n\geq 0} e^{-n^2x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds.$$

Il faut maintenant revenir à U'. On observe que

$$v_n(x) = u_n'(x) + 2xe^{-n^2x^2} = \frac{-2x}{1+n^2} e^{-n^2x^2}.$$

Comme

$$\sup_{x\in[-1,1]} \frac{2x}{1+n^2} e^{-n^2x^2} \leq \frac{1}{1+n^2},$$

la série de terme général v_n converge normalement sur $[-1,1]$. On note

$$V(x) = \sum_{n\geq 0} v_n(x),$$

qui est donc bien définie et continue sur $[-1,1]$, et

$$V(0) = \sum_{n\geq 0} v_n(0) = 0.$$

Pour tout $x \neq 0$, on a

$$U'(x) = V(x) - 2x \sum_{n\geq 0} e^{-n^2x^2}.$$

Chacun des termes du membre de droite dans l'égalité ci-dessus a une limite quand $x \to 0$. On a donc

$$\lim_{x\to 0} U'(x) = -2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds.$$