

Chapitre 6

Changements de variables

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

6.1 C^1 difféomorphismes

Définition 1

Soient U et V deux ouverts non vides de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. On dit qu'une fonction $\phi : U \rightarrow V$ est un C^1 difféomorphisme si

- i) ϕ est bijective de U sur V ,
- ii) ϕ est de classe C^1 sur U ,
- iii) ϕ^{-1} est de classe C^1 sur V .

★ Proposition 1

La bijection réciproque d'un C^1 difféomorphisme est un C^1 difféomorphisme.

★ Proposition 2

La composée de deux C^1 difféomorphismes est un C^1 difféomorphisme.

On peut caractériser les difféomorphismes grâce au théorème d'inversion globale.

Avant de donner cette caractérisation, rappelons que pour toute fonction différentiable $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, où U est un ouvert de \mathbb{R}^n , on définit en chaque point $x \in U$, la matrice jacobienne

de ϕ en x , qu'on note $J_\phi(x)$ par

$$J_\phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

où ϕ_1, \dots, ϕ_n sont les applications coordonnées de ϕ . C'est donc la matrice $(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$.

On appelle Jacobien de ϕ en x le déterminant de la matrice jacobienne de ϕ en x i.e. $\det J_\phi(x)$.

★ Proposition 3

Soient U et V deux ouverts non vides de \mathbb{R}^n et ϕ un C^1 difféomorphisme de U dans V . On a alors

$$\forall x \in U, \quad J_{\phi^{-1}}(\phi(x)) = (J_\phi(x))^{-1}$$

et donc

$$\forall x \in U, \quad \det J_{\phi^{-1}}(\phi(x)) = \frac{1}{\det J_\phi(x)}.$$

Démonstration. On a $\phi \circ \phi^{-1} = \text{Id}_V$ et $\phi^{-1} \circ \phi = \text{Id}_U$.

On a alors d'après les propriétés de différentiation des fonctions composées ($J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$),

$$\begin{aligned} \forall x \in U, \quad I_n &= J_{\text{Id}_V}(\phi(x)) \\ &= J_{\phi \circ \phi^{-1}}(\phi(x)) \\ &= J_\phi(\phi^{-1}(\phi(x))) \times J_{\phi^{-1}}(\phi(x)) \\ &= J_\phi(x) \times J_{\phi^{-1}}(\phi(x)). \end{aligned} \tag{6.1}$$

De même,

$$\begin{aligned} \forall x \in U, \quad I_n &= J_{\text{Id}_U}(x) \\ &= J_{\phi^{-1} \circ \phi}(x) \\ &= J_{\phi^{-1}}(\phi(x)) \times J_\phi(x). \end{aligned} \tag{6.2}$$

On déduit alors de (6.1) et (6.2) que

$$\forall x \in U, \quad J_{\phi^{-1}}(\phi(x)) = (J_\phi(x))^{-1}$$

et par suite

$$\forall x \in U, \quad \det J_{\phi^{-1}}(\phi(x)) = \frac{1}{\det J_{\phi}(x)}.$$

□

★ Théorème 1

(Théorème d'inversion globale : admis) Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application injective et de classe C^1 (les dérivées partielles des ϕ_i , pour $i = 1, \dots, n$, existent et sont continues sur U) dont le Jacobien ne s'annule en aucun point de U . Alors $\phi(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n et ϕ est un C^1 difféomorphisme de U sur $\phi(U)$.

★ Corollaire 1

Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n et $\varphi : U \rightarrow V$ tel que

1. φ est de classe C^1 sur U ,
2. $\forall x \in U, \det J_{\varphi}(x) \neq 0$,
3. φ est bijective.

Alors φ est un C^1 difféomorphisme de U dans V .

6.1.1 Exemples de C^1 difféomorphismes

★ Proposition 4

(Coordonnées polaires) On considère les deux ouverts de \mathbb{R}^2 , $U = \{(r, \theta); r \in]0, +\infty[, \theta \in]-\pi, \pi[\}$ et $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ ou } y \neq 0\}$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow V \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

est un C^1 difféomorphisme de U dans V . On a en plus,

$$\forall (r, \theta) \in U, \quad \det J_{\phi}(r, \theta) = r.$$

Démonstration.

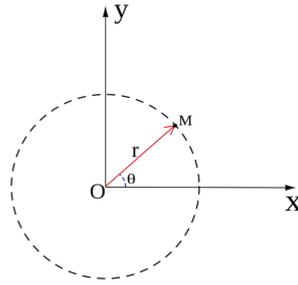


FIGURE 6.1 – Coordonnées polaires

1. L'application ϕ est de classe C^1 sur l'ouvert U (les dérivées partielles de ϕ existent et sont continues sur U) comme ses fonctions composantes le sont car les projections sont C^1 sur \mathbb{R}^2 et \cos et \sin sont C^1 sur \mathbb{R} .
2. On a $\forall (r, \theta) \in U$,

$$J_\phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

avec $\det J_\phi(r, \theta) = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r > 0$ pour tout $(r, \theta) \in U$.

3. La fonction ϕ est injective, même bijective de U dans V . En effet, soit $(x, y) \in V$ ($x > 0$, ou $y \neq 0$). S'il existe $(r, \theta) \in U =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ tel que $(x, y) = \phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, on doit avoir $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Prenons donc $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ car $x > 0$ ou $y \neq 0$.

On a donc $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) \in \mathcal{C}(0, 1) \setminus \{(-1, 0)\}$. Il existe donc un unique $\theta \in]-\pi, \pi[$ tel que $\frac{x}{r} = \cos \theta$ et $\frac{y}{r} = \sin \theta$.

Par suite, il existe un unique $(r, \theta) \in U =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ tel que $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ c'à d $(x, y) = \phi(r, \theta)$.

D'où ϕ est bijective.

Par suite, d'après le Théorème 1 d'inversion globale ou Corollaire 1, ϕ est bien un C^1 difféomorphisme de U dans $\phi(U) = V$. □

★ Proposition 5

(Coordonnées sphériques) On considère les deux ouverts de \mathbb{R}^3 ,

$U =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[$ et $V = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\} \times \mathbb{R})$.

Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow V \\ (r, \theta, \varphi) &\mapsto (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \end{aligned}$$

est un C^1 difféomorphisme de U dans V . On a en plus,

$$\forall (r, \theta, \varphi) \in U, \quad \det J_\phi(r, \theta, \varphi) = -r^2 \sin \varphi.$$

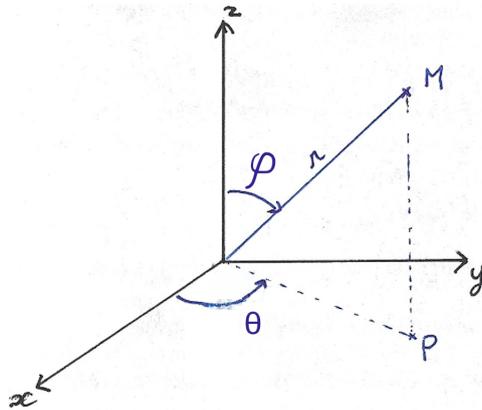


FIGURE 6.2 – Coordonnées sphériques

Démonstration. On a

1. L'application ϕ est de classe C^1 sur U comme ses fonctions composantes le sont car les projections sont C^1 sur \mathbb{R}^2 et \cos et \sin sont C^1 sur \mathbb{R} .
2. On a $\forall (r, \theta, \varphi) \in U$,

$$J_\phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

avec $\det J_\phi(r, \theta, \varphi) = -r^2 \sin \varphi \neq 0$ pour tout $(r, \theta, \varphi) \in U$.

3. La fonction ϕ est injective, même bijective de U dans V . En effet, soit $(x, y, z) \in V$ ($x > 0$, ou $y \neq 0$). Donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ et par suite, d'après Proposition 4, il existe un unique $(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ tel que $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ ($\rho =$

$\sqrt{x^2 + y^2} > 0$).

Par ailleurs, comme $(z, \rho) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, alors en prenant $r = \sqrt{\rho^2 + z^2} > 0$ car $\rho > 0$, $(\frac{z}{r}, \frac{\rho}{r}) \in \mathcal{C}(0, 1) \cap (\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$. Il existe donc un unique $\varphi \in]0, \pi[$ tel que $\frac{z}{r} = \cos \varphi$ et $\frac{\rho}{r} = \sin \varphi$.

Par suite, il existe un unique $(r, \theta, \varphi) \in U$ tel que $x = r \cos \theta \sin \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \varphi$ càd $(x, y, z) = \phi(r, \theta, \varphi)$.

D'où ϕ est bijective.

Par suite, d'après le Théorème 1 d'inversion globale, ou Corollaire 1, ϕ est bien un C^1 difféomorphisme de U dans $\phi(U) = V$. \square

★ Proposition 6

(Coordonnées cylindriques) On considère les deux ouverts de \mathbb{R}^3 , $U =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$ et $V = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\} \times \mathbb{R})$.

Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow V \\ (r, \theta, z) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{aligned}$$

est un C^1 difféomorphisme de U dans V . On a en plus,

$$\forall (r, \theta, z) \in U, \det J_\phi(r, \theta, z) = r.$$

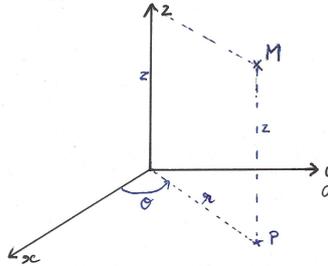


FIGURE 6.3 – Coordonnées cylindriques

Démonstration. Preuve évidente d'après Proposition 4. \square

6.2 Théorème de changement de variables et applications

On va énoncer maintenant le théorème de changement de variables, qui sera également très utile pour calculer des intégrales multiples :

★ Théorème 2

(Théorème de changement de variables : admis). Soient U et V deux ouverts bornés de \mathbb{R}^n et $\phi : U \rightarrow V$ un C^1 difféomorphisme. Alors pour toute fonction $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ continue, on a

$$\int_{V=\phi(U)} f(x)dx = \int_U f(\phi(y)) |\det J_\phi(y)| dy.$$

Pour le moment, nous n'avons vu que les définitions des intégrales doubles et triples sur des domaines "réguliers" dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , nous allons donc énoncer deux variantes de ce théorème de changement de variables dans le cas $n = 2, 3$.

★ Théorème 3

(Théorème de changement de variables dans \mathbb{R}^2 : admis). Soient U et V deux ouverts bornés de \mathbb{R}^2 et $\phi : U \rightarrow V$ un C^1 difféomorphisme. Soit $A \subset U$. Si A et $\phi(A)$ sont deux parties simples de \mathbb{R}^2 , alors pour toute fonction $f : \phi(A) \rightarrow \mathbb{K}$ continue, on a

$$\iint_{\phi(A)} f(x, y) dx dy = \iint_A f(\phi(u, v)) |\det J_\phi(u, v)| du dv.$$

Dans le cas $n = 3$,

★ Théorème 4

(Théorème de changement de variables dans \mathbb{R}^3 : admis) Soient U et V deux ouverts bornés de \mathbb{R}^3 et $\phi : U \rightarrow V$ un C^1 difféomorphisme. Soit $A \subset U$. Si A et $\phi(A)$ sont deux parties de \mathbb{R}^3 décrites en "pile" ou "tranche" (voir Chapitre 5), alors pour toute fonction $f : \phi(A) \rightarrow \mathbb{K}$ continue, on a

$$\iiint_{\phi(A)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(\phi(u, v, w)) |\det J_\phi(u, v, w)| du dv dw.$$

📍 Remarque 1

Le changement de variables linéaire, qu'on verra en TD, est parmi les changements de variables les plus simples.

6.2.1 Changements de variables usuels

On va introduire maintenant des changements de variables particulièrement utiles. En fonction des symétries du problème étudié, ces changements de variables peuvent permettre de considérablement simplifier l'expression des intégrales à calculer.

Coordonnées polaires

★ Théorème 5

(Intégrale en coordonnées polaires). Soient U un ouvert borné de \mathbb{R}^2 inclus dans $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ et $V = \{(r \cos \theta, r \sin \theta); (r, \theta) \in U\}$. Alors pour toute fonction $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ continue, on a

$$\iint_V f(x, y) dx dy = \iint_U f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Démonstration. Le résultat de ce théorème est immédiat d'après Théorème 2 et Proposition 4. □

Ce changement de variable est agréable quand la frontière du domaine d'intégration s'exprime plus facilement comme courbe paramétrée en polaire et/ou que la fonction à intégrer présente une symétrie radiale :

★ Proposition 7

Soit A une partie simple de \mathbb{R}^2 tel qu'il existe deux fonctions $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ continues, 2π périodiques, et vérifiant

$$A = \{(r \cos \theta, r \sin \theta); \theta \in \mathbb{R}, \rho_1(\theta) \leq r \leq \rho_2(\theta)\}.$$

Alors pour toute fonction $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ continue, on a

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right) d\theta.$$

On pourra également utiliser une variante de cette Proposition où θ ne couvre qu'une partie de l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

Démonstration. On a $A = \{(r \cos \theta, r \sin \theta); \theta \in [-\pi, \pi[, \rho_1(\theta) \leq r \leq \rho_2(\theta)\}$.

Notons

$$A' = \{(r \cos \theta, r \sin \theta), \theta \in]-\pi, \pi[, \rho_1(\theta) < r < \rho_2(\theta)\}.$$

Comme $\text{Aire}(A \setminus A') = 0$, on a $\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{A'} f(x, y) dx dy$ ⁽ⁱ⁾.

Et comme $\phi : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ réalise un C^1 difféomorphisme de l'ouvert $\{(r, \theta), \theta \in]-\pi, \pi[, \rho_1(\theta) < r < \rho_2(\theta)\}$ dans l'ouvert A' (Proposition 4), on a alors d'après Théorème 5 et Fubini,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{A'} f(x, y) dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right) d\theta..$$

(i). car si $B \subset A \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\text{Aire}(A \setminus B) = 0$, alors $\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(x, y) dx dy$. (admis)

□

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et soit $R > 0$. Calculer l'aire du disque fermé $\overline{D(a, R)} = \overline{B_2(a, R)}$ (même aire que le disque ouvert $D(a, R)$).

Correction Exercice 1 :

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et soit $R > 0$. Comme $\overline{D(a, R)} = a + \overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, R)}$ et que

$$\overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, R)} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta); \theta \in [-\pi, \pi[, 0 \leq r \leq R\},$$

on a alors

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\overline{D(a, R)}) &= \text{Aire}(\overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, R)}) \\ &= \iint_{\overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, R)}} dx dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R r dr \right) d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R \\ &= \pi R^2. \end{aligned} \tag{6.3}$$

où on a utilisé Proposition 7 dans (6.3) (changement en coordonnées polaires et Fubini).

Exercice 2

(Calcul de l'intégrale de Gauss)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

1. Montrer que pour tout $R > 0$,

$$\iint_{\overline{B_\infty(0_{\mathbb{R}^2}, R)}} f(x, y) dx dy = 4 \left(\int_0^R e^{-t^2} dt \right)^2.$$

2. Calculer pour tout $R > 0$, $\iint_{\overline{B_2(0_{\mathbb{R}^2}, R)}} f(x, y) dx dy$.
3. Comparer pour $R > 0$, $\overline{B_\infty(0_{\mathbb{R}^2}, R)}$, $\overline{B_2(0_{\mathbb{R}^2}, R)}$ et $\overline{B_2(0_{\mathbb{R}^2}, R\sqrt{2})}$.
4. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et déterminer sa valeur.

Correction de l'exercice 2 : Notons tout d'abord que f est continue sur \mathbb{R}^2 comme $(x, y) \mapsto -(x^2 + y^2)$ est continue sur \mathbb{R}^2 (car polynomiale) et exponentielle est continue sur \mathbb{R} .

1. Soit $R > 0$. On a

$$\overline{B}_\infty(0_{\mathbb{R}^2}, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq R, |y| \leq R\} = [-R, R] \times [-R, R].$$

Comme f est continue sur \mathbb{R}^2 donc en particulier sur $\overline{B}_\infty(0_{\mathbb{R}^2}, R) = [-R, R] \times [-R, R]$, on a alors d'après le Théorème de Fubini (ou ici séparation de variables car pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = g(x)g(y)$ avec $g : t \mapsto e^{-t^2}$ continue sur \mathbb{R} donc en particulier sur $[-R, R]$)

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{B}_\infty(0_{\mathbb{R}^2}, R)} f(x, y) dx dy &= \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-R}^R e^{-y^2} dy \right) \\ &= \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 \\ &= 4 \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière égalité le fait que $g : t \mapsto e^{-t^2}$ est paire.

2. Soit $R > 0$. Calculons $\iint_{\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, R)} f(x, y) dx dy$. Comme

$$\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, R) = \{(r \cos \theta, r \sin \theta); -\pi \leq \theta < \pi, 0 \leq r \leq R\},$$

et que f est continue sur $\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, R)$, on a alors d'après Proposition 7 (changement en coordonnées polaires puis Fubini)

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, R)} f(x, y) dx dy &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R e^{-r^2} r dr \right) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_{r=0}^{r=R} d\theta \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \\ &= \pi (1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

3. Pour tout $R > 0$, on a

$$\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, R) \subset \overline{B}_\infty(0_{\mathbb{R}^2}, R) \subset \overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, R\sqrt{2})$$

car pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2 \leq \sqrt{2} \|(x, y)\|_\infty.$$

4. Comme $g : t \mapsto e^{-t^2}$ est paire, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt := 2I$.

D'autre part, comme $f \geq 0$, on a d'après 3. ,

$$\iint_{\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, R)} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\overline{B}_\infty(0_{\mathbb{R}^2}, R)} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, \sqrt{2}R)} f(x, y) dx dy$$

et donc d'après 1. et 2.,

$$\pi(1 - e^{-R^2}) \leq 4 \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi(1 - e^{-2R^2}). \quad (6.4)$$

Comme $\lim_{R \rightarrow +\infty} \pi(1 - e^{-R^2}) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \pi(1 - e^{-2R^2}) = \pi$, on déduit de (6.4) que

$$\pi = \lim_{R \rightarrow +\infty} 4 \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 = 4I^2.$$

D'où $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ($I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \geq 0$) et par suite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2I = \sqrt{\pi}.$$

Remarque :

Comme on se réduit cette année aux domaines bornées, on a dû intégrer f sur des boules pour déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

On verra l'année prochaine qu'on aurait pu directement intégrer $f \geq 0$ sur \mathbb{R}^2 et obtenir (plus rapidement) d'un côté comme dans 1. que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2, \quad (6.5)$$

et d'un autre côté avec le changement en coordonnées polaires comme dans 2. ,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \right) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_{r=0}^{r \rightarrow +\infty} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

D'où avec (6.5), on obtient $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Coordonnées cylindriques

Dans \mathbb{R}^3 , les coordonnées cylindriques sont utiles lorsque le problème étudié présente une symétrie autour d'un axe :

★ Théorème 6

(Intégrale en coordonnées cylindriques). Soient U un ouvert borné de \mathbb{R}^3 inclus dans $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$ et $V = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z); (r, \theta, z) \in U\}$. Alors pour toute fonction $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ continue, on a

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_U f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Démonstration. Le résultat de ce théorème est immédiat d'après Théorème 2 et Proposition 6. \square

★ Proposition 8

Soient A une partie de \mathbb{R}^3 décrite en "pile" ou "tranche" tel qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et deux fonctions $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ continues, 2π périodiques par rapport à la première variable, et vérifiant

$$A = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z); \theta \in \mathbb{R}, z \in [a, b], \rho_1(\theta, z) \leq r \leq \rho_2(\theta, z)\}.$$

Alors pour toute fonction $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ continue, on a

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\rho_1(\theta, z)}^{\rho_2(\theta, z)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr \right) d\theta \right) dz.$$

On pourra également utiliser une variante de cette Proposition où θ ne couvre qu'une partie de l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

Démonstration. Pour $z \in [a, b]$, soit

$$T_z = \{(r \cos \theta, r \sin \theta); \theta \in [-\pi, \pi[, \rho_1(\theta, z) \leq r \leq \rho_2(\theta, z)\}.$$

On a

$$A = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z); z \in [a, b], ((r \cos \theta, r \sin \theta) \in T_z)\}.$$

et donc d'après le Théorème de Fubini en "tranches" (Définition 6, chapitre 5), on a

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{T_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

Et comme

$$\iint_{T_z} f(x, y, z) dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\rho_1(\theta, z)}^{\rho_2(\theta, z)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr \right) d\theta$$

d'après Proposition 7) (passage en coordonnées polaires et Fubini), on a alors le résultat. \square

Exercice 3

Calculer le volume du cône

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2\}.$$

Correction de l'exercice 3 :

1ère méthode (Changement en coordonnées cylindriques)

C est le cône plein de sommet $(0, 0, 0)$ et de base le disque de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon 1.

On a

$$C = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \mid 0 \leq z \leq 1, -\pi \leq \theta < \pi, 0 \leq r \leq z\}.$$

Par passage en coordonnées cylindriques et Fubini (Proposition 8), on obtient

$$\begin{aligned} \text{Vol}(C) &= \iiint_C dx dy dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^z r dr \right) d\theta \right) dz \\ &= \int_0^1 2\pi \frac{z^2}{2} dz \\ &= \pi \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=1} \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Remarque : On aurait pu appliquer Fubini en tranches dans \mathbb{R}^3 puis les coordonnées polaires : Pour tout $z \in [0, 1]$, soit

$$C_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y, z) \in C\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq z^2\} = \overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, z)}$$

(partie élémentaire de \mathbb{R}^2).

On a alors $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1, (x, y) \in C_z\}$ (décrit en tranche).

Par suite, d'après le Théorème de Fubini en tranches sur \mathbb{R}^3 , on a

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(C) &= \iiint_C dx dy dz \\
 &= \int_0^1 \left(\iint_{C_z} dx dy \right) dz \\
 &= \int_0^1 \text{Aire}(\overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, z)}) dz \\
 &= \int_0^1 \pi z^2 dz \\
 &= \pi \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=1} \\
 &= \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

2ème méthode : (Fubini en piles)

On a $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1, \}$ (décrit en pile) où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\} = \overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, 1)} = \overline{B_2(0_{\mathbb{R}^2}, 1)}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(C) &= \iiint_C dx dy dz \\
 &= \iint_{\overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, 1)}} \left(\int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^1 dz \right) dx dy & (6.6) \\
 &= \iint_{\overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, 1)}} \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 (1 - r)r dr \right) d\theta & (6.7) \\
 &= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} \\
 &= \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

où on a utilisé le Théorème de Fubini en piles sur \mathbb{R}^3 dans (6.6) et le changement en coordonnées polaires dans \mathbb{R}^2 (Proposition 7) à $f : (x, y) \mapsto 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ continue sur \mathbb{R}^2 et donc en particulier sur $\overline{D(0_{\mathbb{R}^2}, 1)}$.

Coordonnées sphériques**★ Théorème 7**

(Intégrale en coordonnées sphériques). Soient U un ouvert borné de \mathbb{R}^3 inclus dans $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[$ et $V = \{(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi); (r, \theta, \varphi) \in U\}$. Alors pour toute fonction $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ continue, on a

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_U f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi.$$

Démonstration. Le résultat de ce théorème est immédiat d'après Théorème 2 et Proposition 5. □

🔪 Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}^3$ et soit $R > 0$. Calculer le volume de la boule ouverte $B_2(a, R)$ (même volume que la boule fermée $\overline{B_2(a, R)}$).

Correction Exercice 4 :

Soit $a \in \mathbb{R}^3$ et soit $R > 0$. On a $B_2(a, R) = a + B_2(0_{\mathbb{R}^3}, R)$. On a

$$B_2(0_{\mathbb{R}^3}, R) = \{(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi), 0 \leq r < R, -\pi \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Notons $B = \{(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi), 0 < r < R, -\pi < \theta < \pi, 0 < \varphi < \pi\}$. Comme $\text{Vol}(B_2(0_{\mathbb{R}^3}, R) \setminus B) = 0$, on a

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B_2(a, R)) &= \text{Vol}(B_2(0_{\mathbb{R}^3}, R)) \\ &= \iiint_{B_2(0_{\mathbb{R}^3}, R)} dx dy dz \\ &= \iiint_B dx dy dz \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$= \iiint_{]0, R[\times]-\pi, \pi[\times]0, \pi[} r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \tag{6.9}$$

$$= \left(\int_0^R r^2 dr \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right) \tag{6.10}$$

$$= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \times 2\pi \times [-\cos \varphi]_0^{\pi}$$

$$= \frac{R^3}{3} \times 2\pi \times 2$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3},$$

où on a utilisé dans (6.8) le fait que si $B \subset A \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Vol}(A \setminus B) = 0$, alors $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$ (admis), le changement en coordonnées sphériques dans (6.9) puis Fubini ou le théorème de séparation de variables dans (6.10).