Chapitre 5

Intégrales multiples

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Intégrales doubles

Considérons une fonction de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{K}$ continue, et une région D du plan $\mathbb{R}^2$, bornée et contenue dans l'ensemble de définition de f.
Nous voulons définir l'intégrale de la fonction f sur D. Pour cela, nous allons utiliser ce que nous connaissons déjà : les intégrales de fonctions d'une variable.
Autrement dit, on va d'abord intégrer f par rapport à la variable x, en considérant la variable y comme un paramètre. Le résultat de cette première intégration dépendra de la valeur du "paramètre" y. On intègrera alors ce résultat par rapport à y.
Bien entendu, on pourra faire la même chose en échangeant les rôles de x et de y ; nous verrons que cela donne le même résultat.
Une des difficultés est de tenir compte de la géométrie de D qui peut être un polygone quelconque, ou un disque, ou la région délimitée par une courbe fermée très compliquée...
Fixer la valeur de la variable y et intégrer par rapport à x revient à découper D en tranches horizontales ; fixer la valeur de la variable x et intégrer par rapport à y revient à découper D en tranches verticales.

5.1.1 Théorème de Fubini

Définition 1

On appelle pavé de $\mathbb{R}^2$ toute partie P de $\mathbb{R}^2$ de la forme $P = [a, b] \times [c, d]$ avec $a < b$ et $c < d$. En d'autres termes, un pavé de $\mathbb{R}^2$ est un produit de deux segments de $\mathbb{R}$.

Théorème 1

(Théorème de Fubini, admis) Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur le pavé $[a,b] \times [c,d]$. Alors les fonctions

$$\begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)dy \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} [c,d] & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)dx \end{array}$$

sont continues et on a

$$\int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)dy \right) dx = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)dx \right) dy.$$

La valeur commune de ces deux intégrales est appelée intégrale double de f sur le pavé $P = [a,b] \times [c,d]$ et est notée

$$\iint_P f \quad \text{ou} \quad \iint_P f(x,y)dxdy.$$

Corollaire 1

Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{K}$ une fonction à variables séparées, càd qu'il existe $g : [a,b] \to \mathbb{K}$, $h : [c,d] \to \mathbb{K}$ telles que

$$\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d],\ f(x,y) = g(x)h(y).$$

On suppose que g et h sont continues sur $[a,b]$ et $[c,d]$ respectivement, alors

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx \right) \left(\int_c^d h(y)dy \right).$$

Exercice 1

Calculer l'intégrale de la fonction $f : (x,y) \mapsto xy^2$ sur le pavé $P = [0,1] \times [1,2]$.

Correction de l'exercice 1 :
On a f est une fonction à variables séparées avec $\forall (x,y) \in [0,1] \times [1,2]$, $f(x,y) = g(x)h(y)$ avec $g : x \mapsto x$ continue sur $[0,1]$ et $h : y \mapsto y^2$ continue sur $[1,2]$. Par suite, d'après le

Corollaire 1,

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]\times[1,2]} f(x,y)dxdy &= \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_1^2 y^2dy\right)\\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^1 \times \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=1}^2\\ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\\ &= \frac{7}{6}\end{aligned}$$

Théorème 2

(Extension aux fonctions continues par morceaux) Soit $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{K}$ une fonction bornée. On suppose que

i) $\forall x \in [a,b]$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue par morceaux sur $[c,d]$,

ii) $\forall y \in [c,d]$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est continue par morceaux sur $[a,b]$,

alors on a l'égalité

$$\int_{x=a}^{x=b}\left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)dy\right)dx = \int_{y=c}^{y=d}\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)dx\right)dy.$$

Cette valeur commune est encore appelée l'intégrale double de f sur $[a,b]\times[c,d]$ et est notée $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$.

5.1.2 Généralisation aux parties élémentaires, simples

Définition 2

Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite élémentaire s'il existe $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $c < d$ et des fonctions φ_1, φ_2 continues sur $[a,b]$ et ψ_1, ψ_2 continues sur $[c,d]$ telles que $\forall x \in [a,b],\ \varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ et $\forall y \in [c,d],\ \psi_1(y) \le \psi_2(y)$ et

$$\begin{aligned}A &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}.\end{aligned}$$

Dans ce cas, l'intérieur de A est

$$\begin{aligned}\mathring{A} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ c < y < d,\ \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}.\end{aligned}$$

Exemple :

1. Le pavé $[a,b]\times[c,d]$ avec $a<b$ et $c<d$ est une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$.
2. Le disque unité fermé

$$\overline{D(0_{\mathbb{R}^2},1)}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\leq 1\}$$

peut s'écrire

$$\overline{D(0_{\mathbb{R}^2},1)}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; -1\leq x\leq 1,\ -\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\}$$

ou

$$\overline{D(0_{\mathbb{R}^2},1)}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; -1\leq y\leq 1,\ -\sqrt{1-y^2}\leq x\leq\sqrt{1-y^2}\}.$$

et est donc une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 3

(Théorème de Fubini généralisé) Soient $A\subset\mathbb{R}^2$ une partie élémentaire et $f:A\to\mathbb{K}$ une fonction continue, alors si l'on note

$$\begin{aligned}A&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a\leq x\leq b,\ \varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x)\}\\&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ c\leq y\leq d,\ \psi_1(y)\leq x\leq\psi_2(y)\},\end{aligned}$$

on a

$$\int_{x=a}^{x=b}\left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right)dx=\int_{y=c}^{y=d}\left(\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)}f(x,y)dx\right)dy.$$

La valeur commune de ces deux intégrales est appelée intégrale double de f sur A et est notée $\iint_A f(x,y)dxdy$.

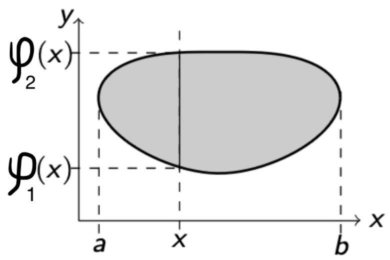

FIGURE 5.1 – Intégration par tranches verticales

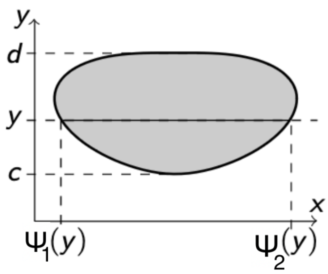

FIGURE 5.2 – Intégration par tranches horizontales

Exercice 2

On note $T = \{(x, y) \in [0, 1]^2;\ y \leq x\}$. Calculer $\iint_T x^2y^3dxdy$.

Correction de l'exercice 2 : D'après le Théorème de Fubini généralisé, Théorème 3, appliqué

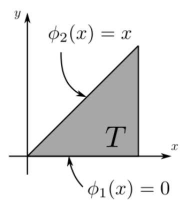

FIGURE 5.3 – T

à $f : (x, y) \mapsto x^2y^3$ continue sur $\mathbb{R}^2$ donc en particulier sur T partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$: $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1\}$, on a

$$\begin{aligned}
\iint_T x^2y^3dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^x x^2y^3dy\right) dx \\
&= \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^6}{4}dx = \left[\frac{x^7}{28}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{28}.
\end{aligned}$$

On aurait pu aussi dire

$$\begin{aligned}
\iint_T x^2y^3dxdy &= \int_0^1 \left(\int_y^1 x^2y^3dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(y^3 \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=y}^{x=1}\right) dy \\
&= \int_0^1 y^3(\frac{1}{3} - \frac{y^3}{3})dy \\
&= \left[\frac{y^4}{12} - \frac{y^7}{21}\right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{1}{12} - \frac{1}{21} \\
&= \frac{7-4}{84} \\
&= \frac{1}{28}.
\end{aligned}$$

Définition 3

Soit A une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$. Alors on appelle aire de A la quantité

$$\iint_A dxdy.$$

Exercice 3

On considère $T = \{(x,y) \in [0,1]^2; x+y \leq 1\}$. Calculer l'aire de T.

Correction de l'exercice 3 :

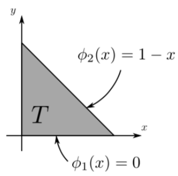

FIGURE 5.4 – T

T est une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$:

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq 1-y\}.$$

On a alors

$$\text{Aire}(T) = \iint_T dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} dy \right) dx = \int_0^1 (1-x)dx = \left[-\frac{(1-x)^2}{2} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2}.$$

Définition 4

Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite simple si elle est réunion d'une famille finie non vide de parties élémentaires d'intérieurs deux à deux disjoints, i.e. s'il existe $A_1, ..., A_n$ des parties élémentaires de $\mathbb{R}^2$ avec $(n \in \mathbb{N}^*)$ vérifiant

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad \text{et } \forall i,\ j = 1, ..., n,\ i \neq j \Longrightarrow \mathring{A}_i \cap \mathring{A}_j = \emptyset.$$

Définition 5

Soit A est une partie simple de $\mathbb{R}^2$, avec $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ où les A_i sont des parties élémentaires.

Si $f : A \to \mathbb{K}$ est continue, on appelle intégrale double de f sur A le scalaire

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} f(x,y)dxdy.$$

Proposition 1

Soit A une partie simple de $\mathbb{R}^2$. Pour toutes fonctions $f,\ g : A \to \mathbb{K}$ continues, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

i) $\displaystyle\iint_A (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))\, dxdy = \lambda \iint_A f(x,y)dxdy + \mu \iint_A g(x,y)dxdy$,

ii) Si f est à valeurs positives, alors $\displaystyle\iint_A f(x,y)dxdy \geq 0$,

iii) Si f est à valeurs positives et $\displaystyle\iint_A f(x,y)dxdy = 0$, alors f est nulle sur A,

iv) $\displaystyle\left| \iint_A f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_A |f(x,y)|dxdy$.

Proposition 2

Soient A, B deux parties simples de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \cup B \to \mathbb{K}$ continue. Si $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset$, alors $\displaystyle\iint_{A\cup B} f(x,y)dxdy = \iint_A f(x,y)dxdy + \iint_B f(x,y)dxdy$.

5.2 Intégrales triples

Définition 6

(Théorème de Fubini en tranches) Soit A une partie de $\mathbb{R}^3$ décrite en "tranche" :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ a \leq z \leq b, \quad \text{et} \quad (x, y) \in D_z\}$$

où a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et pour tout $z \in [a, b]$, la tranche D_z est une partie simple de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{K}$ continue, on définit alors l'intégrale triple sur A comme

$$\iiint_A f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z)dxdy \right) dz.$$

Proposition 3

(Théorème de Fubini en piles) Soit A une partie de $\mathbb{R}^3$ décrite en "pile" au dessus d'une partie simple D de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y) \in D \ \text{ et } \ \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

où D est une partie simple de $\mathbb{R}^2$ et α et β sont deux fonctions continues sur D.
Soit $f : A \to \mathbb{K}$ continue. Alors l'intégrale triple de f sur A est

$$\iiint_A f(x, y, z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy.$$

Définition 7

Soit A une partie de $\mathbb{R}^3$ décrite en "pile" ou "tranche" (cf. Définition 6, Proposition 3), alors le volume de A est donné par $\displaystyle\iiint_A dxdydz$.

Remarque 1

Si f est une fonction continue, positive sur D, partie simple de $\mathbb{R}^2$, alors

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \mathrm{Vol}(A)$$

où

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

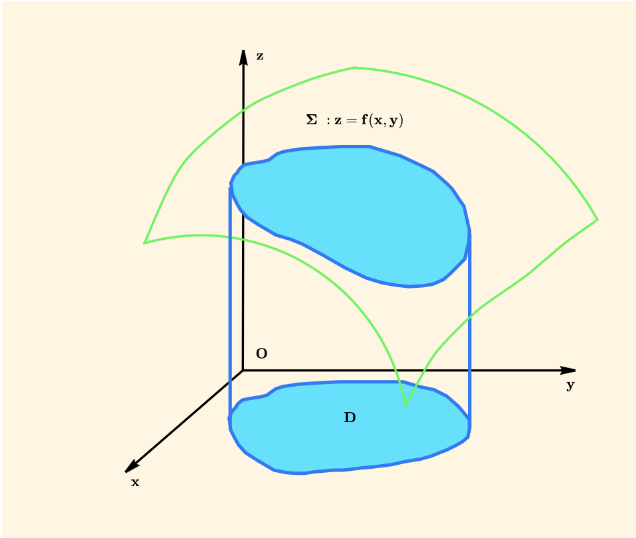

FIGURE 5.5

Exercice 4

On considère le simplexe $T_3 = \{(x,y,z) \in [0,1]^3;\ x+y+z \leq 1\}$.
Calculer $Vol(T_3)$.

Correction de l'exercice 4 :
Pour tout $z \in [0,1]$, considérons (le triangle) $T_z = \{(x,y) \in [0,1]^2;\ x+y \leq 1-z\} = \{(x,y) \in [0,1-z]^2;\ x+y \leq 1-z\}$.
On a alors

$$T_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z \in [0,1] \text{ et } (x,y) \in T_z\}.$$

Par suite, d'après Définition 6 (Fubini en tranches)

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(T_3) &= \int_0^1 \left(\iint_{T_z} dxdy\right) dz \\ &= \int_0^1 (\mathrm{Aire}(T_z))dz \\ &= \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2} dz \\ &= \left[-\frac{(1-z)^3}{6}\right]_{z=0}^{z=1} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que l'aire du triangle T_z n'est autre que $\dfrac{(1-z)^2}{2}$.

2ème façon :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(T_3) &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-z-x} dy\right) dx\right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} (1-z-x) dx\right) dz \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{(1-z-x)^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1-z} dz \\
&= \int_0^1 -\frac{(1-z)^2}{2} dz \\
&= \left[-\frac{(1-z)^3}{6}\right]_{z=0}^{z=1} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 5

On considère la boule unité fermée (pour la norme $\| \,.\, \|_2$)

$$\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^3}, 1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Calculer $\mathrm{Vol}(\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^3}, 1))$.

Correction de l'exercice 5 :

Pour tout $z \in [-1, 1]$, considérons $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1-z^2\} = \overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, \sqrt{1-z^2})$.

On a alors

$$\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^3}, 1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \in [-1, 1] \text{ et } (x, y) \in \overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^2}, \sqrt{1-z^2})\}.$$

Par suite, d'après Définition 6 (Fubini en tranches)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\overline{B}_2(0_{\mathbb{R}^3}, 1)) &= \int_{-1}^1 \left(\iint_{D_z} dxdy\right) dz \\
&= \int_{-1}^1 \mathrm{Aire}(D_z) dz \\
&= \int_{-1}^1 \pi(1-z^2) dz \\
&= \pi \left[z - \frac{z^3}{3}\right]_{z=-1}^{z=1} \\
&= 2\pi(1 - \frac{1}{3}) \\
&= \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Remarque 2
Bien sûr, toutes ces définitions se généralisent à des domaines de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Le théorème de Fubini ramène le calcul d'une intégrale sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ au calcul de n intégrales successives sur des intervalles de $\mathbb{R}$.