Chapitre 4

Intégrales à paramètres

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Il s'agit dans ce chapitre de mettre en place les outils permettant d'étudier les fonctions définies par des intégrales.
Il y a en effet en analyse de nombreuses occasions de définir une fonction par une intégrale, qu'on appelle aussi intégrale à paramètre (le paramètre étant la variable dont dépend la fonction considérée).
Par exemple, on peut considérer la fonction Γ d'Euller : elle est définie (on verra ça à la fin du chapitre) pour tout $x > 0$, par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

4.1 Continuité des intégrales à paramètres

Théorème 1
(Continuité des intégrales à paramètres) Soient $A \subset \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times A$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

i) $\forall x \in A$, la fonction $f(.,x) \ : t \mapsto f(t,x)$ est continue par morceaux sur I,

ii) $\forall t \in I$, la fonction $f(t,.) \ : x \mapsto f(t,x)$ est continue sur A,

iii) (hypothèse de domination) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A, \quad |f(t,x)| \leq \varphi(t), \quad \forall t \in I.$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(t,x)\, dt$ est bien définie et continue sur A.

Démonstration. Soit $x \in A$. La fonction $f(.,x)$ est continue par morceaux sur I d'après i) et d'après iii), son module est majoré sur I par la fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I.

Par suite, $f(.,x)$ est intégrable sur I (i.e. $0 \leq \int_I |f(t,x)|dt < +\infty$) et donc $\int_I f(t,x)dt \in \mathbb{K}$.
On a donc montré que pour tout $x \in A$, $F(x) \in \mathbb{K}$. D'où F est bien définie sur A.

Montrons que F est continue sur A.
Soit $a \in A$. Montrons que F est continue en a. Pour cela, on va utiliser le critère séquentiel de la continuité.
Soit donc $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers a. Montrons que la suite $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F(a)$.
Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction $f(.,x_n)$ définie sur I par $f_n(t) = f(t,x_n)$ pour tout $t \in I$. On a :

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux d'après i),

b. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers la fonction $f(.,a)$ d'après ii) avec $f(.,a)$ continue par morceaux d'après i).
   En effet, pour tout $t \in I$, la fonction $f(t,.) : x \mapsto f(t,x)$ est continue sur A d'après ii). Comme $\lim\limits_n x_n = a$, on déduit que $\lim\limits_n f_n(t) = \lim\limits_n f(t,x_n) = f(t,a)$.

c. D'après iii), il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur I tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leq \varphi(t), \quad \forall t \in I \quad \text{ i.e. } \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi \quad \text{sur } I.$$

Par suite, d'après le théorème de convergence dominée du Chapitre 1, la suite $(F(x_n))_n = \left(\int_I f_n(t))dt\right)_n$ converge et a pour limite $\int_I f(a,t)dt = F(a)$.
On a donc montré que pour tout suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F(a)$. Par suite F est continue en a, pour tout $a \in I$ et donc F est continue sur I. □

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}\, dt$. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1 :
Pour $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, posons $f(t,x) = \sin(xt)e^{-t^2}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dt$.
On a :

i) $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(.,x) : t \mapsto f(t,x)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$ car les fonctions sinus et exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$,

ii) $\forall t \geq 0$, la fonction $f(t,.) : x \mapsto f(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car la fonction sinus l'est sur $\mathbb{R}$,

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(t,x)| = |\sin(xt)|e^{-t^2} \leq e^{-t^2} = \varphi(t), \quad \forall t \geq 0,$$

avec la fonction φ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
En effet, φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ car exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto -t^2$ l'est aussi.
Montrons que φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
En effet, φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc intégrable sur tout segment $[0,b] \subset [0,+\infty[$ et au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ par croissance comparée. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est inégrable au voisinage de $+\infty$ (intégrale de Riemman avec $\alpha = 2 > 1$), on déduit que φ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et par suite sur $[0,+\infty[$.

Par suite, d'après le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Pour $x \geq 1$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t}\, dt$. Montrer que F est bien définie et continue sur $[1,+\infty[$.

Correction de l'exercice 2 :
Pour $(t,x) \in [0,\pi] \times [1,+\infty[$, posons $f(t,x) = \sqrt{x+\cos t}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t,x)dt$.
On a

i) $\forall x \geq 1$, la fonction $f(.,x) : t \mapsto f(t,x)$ est continue (par morceaux) sur $[0,\pi]$ car cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ et $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$,

ii) $\forall t \in [0,\pi]$, la fonction $f(t,.) : x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[1,+\infty[$ car $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $x \geq 1$ ($x + \cos t \geq 0$ pour tout $t \in [0,\pi]$) ,

iii) Soit $b > 1$. On a $\forall x \in [1,b]$,

$$|f(t,x)| = \sqrt{x+\cos t} \leq \sqrt{b + \cos t} = \varphi_b(t), \ \forall t \in [0,\pi].$$

De plus, la fonction φ_b est continue sur le segment $[0,\pi]$ (car cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ et $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$) et donc intégrable sur le segment $[0,\pi]$.

Par suite, d'après le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F est bien définie et continue sur $[1,b]$, $\forall b > 1$ et donc définie et continue sur $\displaystyle\bigcup_{b>1}[1,b] = [1,+\infty[$.

4.1.1 Utilisation du Théorème de convergence dominée

Le Théorème 1 dit que quand $a \in A$, $\lim\limits_{x \to a} \int_I f(t,x)dt = \int_I \lim\limits_{x \to a} f(t,x)dt$.
On peut généraliser ce résultat quand a est adhérent au domaine A, a réel ou infini, grâce encore une fois au Théorème de convergence dominée.

Voici un exemple :

Exercice 3

1. Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}dt$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.

Démonstration. 1. Soit

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (t,x) & \mapsto & e^{-x^2t^2} \end{array}$$

On a

i) Pout tout $x \in \mathbb{R}$, $f(.,x) : t \mapsto f(t,x)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$ car exponentielle et $u \mapsto u^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$,

ii) De même, pour tout $t \geq 0$, $f(t,.) : x \mapsto f(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

iii) Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$.
On a pour tout $x \in [a,b]$,

$$|f(t,x)| \leq e^{-c^2t^2} = \varphi_c(t), \ \forall t \geq 0$$

où $c = \min(|a|,|b|)$ (on a utilisé le fait que $y \mapsto e^{-yt^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et que $|x| \geq c$.)
La fonction φ_c est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$ et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
En effet, φ_c est continue sur $\mathbb{R}^+$, car exponentielle l'est, et est donc intégrable sur tout segment $[0,d] \subset [0,+\infty[$.
Au voisinage de $+\infty$, on a $0 \leq \varphi_c(t) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ par croissance comparée. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est inégrable au voisinage de $+\infty$ (intégrale de Riemman avec $\alpha = 2 > 1$), on déduit que φ_c est intégrable au voisinage de $+\infty$ et par suite sur $[0,+\infty[$.

Par suite d'après le Théorème 1, F est bien définie et continue sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et donc bien définie et continue sur $\bigcup\limits_{a<b} [a,b] = \mathbb{R}$.

2. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui tend vers $+\infty$. Comme $\lim_n x_n = +\infty$, on peut supposer $x_n \geq 1$, $\forall n \geq 0$.
   Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n := f(., x_n) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = e^{-x_n^2 t^2}$ pour tout $t \geq 0$.
   On a
   i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = f(., x_n)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$ d'après 1. i) (ou redire car car exponentielle et $u \mapsto u^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$),
   ii) Convergence simple de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
   Soit $t_0 \geq 0$.
      a. Si $t_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 1$ et donc $\lim_n f_n(0) = 1$.
      b. Si $t_0 > 0$, comme $\lim_n x_n = +\infty$, $\lim_n f_n(t_0) = 0$.

   Par suite, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(0) = 1$ et $h(t) = 0$ pour tout $t > 0$.
   La fonction h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ (continue partout sauf en 0),
   iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(t)| = e^{-x_n^2 t^2} \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et donc

$$\forall n, \ |f_n| \leq \varphi \quad \text{sur} \ \ \mathbb{R}^+$$

   avec la fonction φ continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$ et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$(même preuve que celle pour φ_c dans 1.).

   Par suite, d'après le Théorème de convergence dominée, (les f_n et h sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et) on a

$$\lim_{n \to +\infty} F(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} h(t)dt = 0.$$

   Conclusion : On a donc montré que $\lim_{n \to +\infty} F(x_n) = 0$ pour tout suite réelle $(x_n)_n$ tel que $\lim_n x_n = +\infty$.
   Par suite $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.
   On montre pareil que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ (en supposant cette fois $x_n \leq -1$ pour tout n).

□

4.2 Dérivabilité des intégrales à paramètres

Théorème 2
(Dérivabilité d'une intégrale à paramètre)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

i) $\forall x \in J$, la fonction $f(.,x)$ est continue par morceaux et intégrable sur I,

ii) $\forall t \in I$, $f(t,.)$ est dérivable sur J i.e. $\forall t \in I$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ existe pour tout $x \in J$ (respectivement $\forall t \in I$, la fonction $f(t,.)$ est C^1 sur J i.e. $\forall t \in I$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,.) : x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est bien définie et continue sur J),

iii) $\forall x \in J$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(.,x) : t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue par morceaux sur I,

iv) il existe une fonction $\psi : I \to \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall x \in J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq \psi(t), \quad \forall t \in I.$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(t,x)dt$ est bien définie et dérivable (respectivement de classe C^1) sur J et on a

$$\forall x \in J, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt.$$

Démonstration. D'après i), puisque $\forall x \in J$, la fonction $f(.,x) : t \mapsto f(t,x)$ est continue par morceaux et intégrable sur I, la fonction F est bien définie sur J.
Soit $a \in J$. Montrons que F est dérivable en a.
Posons $\forall (t,x) \in I \times J$

$$g_a(t,x) = \begin{cases} \dfrac{f(t,x) - f(t,a)}{x-a} & \text{si } \ x \neq a, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,a) & \text{si } \ x = a \end{cases}$$

Notons que pour $x \neq a$, $\dfrac{F(x) - F(a)}{x-a} = \displaystyle\int_I g_a(t,x)dt$. On va appliquer le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètres à g_a.

a) $\forall x \in J$ (y compris pour $x = a$), la fonction $g_a(.,x) : t \mapsto g_a(t,x)$ est continue par morceaux sur I d'après i) et iii).

b) $\forall t \in I$, la fonction $g_a(t,.) : x \mapsto g_a(t,x)$ est continue sur J d'après ii) (y compris pour $x = a$). En effet, pour $x \neq a$ c'est dû au fait que $f(t,.)$ est continue sur J (car dérivable) et $u \mapsto \frac{1}{u}$ continue sur $\mathbb{R}^*$. Et pour $x = a$, on a par définition de $\frac{\partial f}{\partial x}(t,a)$, pour tout $x \neq a$, $g_a(t,x) = \frac{f(t,x) - f(t,a)}{x-a} \underset{x \to a}{\to} \frac{\partial f}{\partial x}(t,a) = g_a(t,a)$.

c) $\forall x \in J$, on a, d'après l'inégalité des accroissements finis et iv),

$$\forall t \in I,\ |g_a(t,x))| = \begin{cases} \left|\frac{f(t,x)-f(t,a)}{x-a}\right| & \text{si } x \neq a, \\ |\frac{\partial f}{\partial x}(t,a)| & \text{si } x = a \end{cases} \le \sup_{u \in J} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,u)\right| \le \psi(t).$$

Par suite, d'après le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètres, la fonction G_a : $x \mapsto \int_J g_a(t,x)dt$ est bien définie et continue sur J et donc en particulier continue en a. On en déduit que le taux $\frac{F(x) - F(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a égale à $G_a(a)$ et donc que F est dérivable en a avec

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} G_a(x) = G_a(a) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,a)\, dt.$$

Ainsi, F est dérivable en a, $\forall a \in J$, donc sur J et sa dérivée s'obtient par la dérivation sous le signe intégrale.

Enfin, si on suppose en plus dans ii) que $\forall t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue sur J (i.e. la fonction $f(t,.)$ est C^1 sur J), on a d'après le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètres appliqué cette fois-ci à la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ (à vérifier les hypothèses), la fonction $F' : x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ est continue sur J et donc F est de classe C^1 sur J. $\square$

Par récurrence, on en déduit du Théorème 2, le Corollaire suivant pour les dérivées d'ordre supérieur.

Corollaire 1

(Intégrale à paramètre de classe C^p)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

i) $\forall x \in J$, la fonction $f(.,x)$ est continue par morceaux et intégrable sur I,

ii) $\forall t \in I$, la fonction $f(t,.)$ est C^p sur J i.e. $\forall k = 1,...,p$, la fonction $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,.) : x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)$ est bien définie et continue sur J,

iii) $\forall k = 1,...,p$, $\forall x \in J$, la fonction $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(.,x) : t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)$ est continue par morceaux sur I,

iv) $\forall k = 1,...,p$, il existe une fonction $\psi_k : I \to \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur I telle que
$$\forall x \in J, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)\right| \leq \psi_k(t), \quad \forall t \in I.$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(t,x)dt$ est définie et de classe C^p sur J et on a

$$\forall k = 1,...,p,\ \forall x \in J, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)\,dt.$$

Et le Corollaire suivant :

Corollaire 2

(Intégrale à paramètre de classe C^{∞})
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

i) $\forall x \in J$, la fonction $f(.,x)$ est continue par morceaux et intégrable sur I,

ii) pour tout $t \in I$, la fonction $f(t,.)$ est C^{∞} sur J i.e. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,.) : x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)$ est bien définie et continue sur J,

iii) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in J$, la fonction $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(.,x) : t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)$ est continue par morceaux sur I,

iv) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $\psi_k : I \to \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur I telle que
$$\forall x \in J, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)\right| \leq \psi_k(t), \quad \forall t \in I.$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(t,x)dt$ est définie et de classe C^{∞} sur J et on a
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in J, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)dt.$$

Exercice 4

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Quel est le domaine de définition de Γ ?
2. Montrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que Γ est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0,+\infty[$, et calculer $\Gamma^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que Γ est strictement convexe.
5. Montrer que Γ est log-convexe.
6. a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   b) En déduire $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et un équivalent de Γ en 0.
   c) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x)$.
7. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Intégrale de Gauss). Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.
8. Etudier les variations de Γ et donner l'allure de son graphe.

Correction de l'exercice 4 :

1. Considérons pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{cccc} f_x & : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & t^{x-1}e^{-t}. \end{array}$$
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_x \geq 0$ et continue sur $]0,+\infty[$ (car exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto t^\alpha$ est continue sur $]0,+\infty[$).
Donc $\Gamma(x)$ est bien définie lorsque $f_x \geq 0$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_x est continue sur $]0,+\infty[$, elle est donc intégrable sur tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$, reste le problème au voisinage de 0 et de $+\infty$.
Au voisinage de 0, $0 \leq f_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ (car $\lim\limits_{t\to 0} e^{-t} = 1$) donc f_x est intégrable au voisinage de 0 ssi $1-x<1$ (on s'est ramené à une intégrale de Riemann au voisinage de 0) i.e ssi $x > 0$.
Au voisinage de $+\infty$,
$$0 \leq f_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2}) \tag{4.1}$$
car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f_x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^{x+1}}{e^t} = 0$ par croissance comparée.
Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, intégrale de Riemann convergente au voisinage de $+\infty$ car $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (4.1) que f_x est intégrable au voisinage de $+\infty$.

   Par suite, f_x est intégrable sur $]0,+\infty[$ ssi $x > 0$ et donc le domaine de définition de Γ est $]0,+\infty[$.

2. Soit
$$\begin{array}{cccc} f & : &]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & (t,x) & \mapsto & t^{x-1}e^{-t} \end{array}$$
On a :
   i) $\forall x > 0$, la fonction $f(.,x) = f_x \ : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ (voir 1.),
   ii) $\forall t > 0$, la fonction $f(t,.) \ : x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ car exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ ($t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$),
   iii) Soit $0 < a < b < +\infty$.
On a $\forall x \in [a,b]$,
$$\forall t > 0, \quad |f(t,x)| = |t^{x-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t} \leq g(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$
car $y \mapsto t^y$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < t < 1$ et est croissante sur $\mathbb{R}$ si $t \geq 1$.

On a g est continue sur $]0,+\infty[$ (même en 1) et intégrable sur $]0,+\infty[$. En effet, comme g est continue sur $]0,+\infty[$, elle est donc intégrable sur tout segment $[c,d] \subset]0,+\infty[$, reste le problème au voisinage de 0 et de $+\infty$.
Au voisinage de 0, $0 \leq g(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{a-1} = \dfrac{1}{t^{1-a}}$, on se ramène donc à une intégrale de Riemann convergente au voisinage de 0 car $1-a<1$ (comme $a>0$) et donc g est intégrable au voisinage de 0.
Au voisinage de $+\infty$,

$$0 \leq g(t) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2}) \tag{4.2}$$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^{b+1}}{e^t} = 0$.
Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, intégrale de Riemann convergente au voisinage de $+\infty$ car $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (4.2) que g est intégrable au voisinage de $+\infty$.

D'où g est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Par suite, d'après le Théorème 1, Γ est bien définie et continue sur tout segment $[a,b]$ avec $0<a<b<+\infty$ et donc bien définie (on le savait déjà d'après 1.) et continue sur $]0,+\infty[= \bigcup\limits_{0<a<b<+\infty} [a,b]$.

3. Montrons que Γ est de classe C^∞. On a
   i) $\forall x>0$, la fonction $f(.,x) = f_x$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après 1. ou 2.(i) et iii)),
   ii) $\forall t>0$, la fonction $f(t,.) : x \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t}e^{-t}$ est C^∞ sur $]0,+\infty[$ et on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x>0$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x) = (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$.
   iii) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x>0$, la fonction $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(.,x) : t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x) = (\ln t)^k t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ car $\ln$, $t \mapsto e^{-t}$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto t^\alpha$ sont continues sur $]0,+\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $u \mapsto u^k$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   iv) Soient $0<a<b<+\infty$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   On a $\forall x \in]a,b[$,

$$\forall t>0, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)\right| = |\ln t|^k t^{x-1}e^{-t} \leq g_k(t) = \begin{cases} |\ln t|^k\, t^{a-1}e^{-t} & \text{si } 0<t<1 \\ |\ln t|^k\, t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

   même justification que dans 2..
   On a g_k est continue sur $]0,+\infty[$ (même en 1) et intégrable sur $]0,+\infty[$.
   En effet, comme g_k est continue sur $]0,+\infty[$, elle est intégrable sur tout segment $[c,d] \subset]0,+\infty[$.
   Au voisinage de 0 (on suppose $0<t<1$), $0 \leq g_k(t) \underset{0}{\sim} |\ln t|^k t^{a-1} = (-1)^k (\ln t)^k t^{a-1}$

intégrable au voisinage de 0 car on se ramène à une intégrale de Bertrand au voisinage de 0 avec $\alpha = 1 - a < 1$ donc convergente (ou dire que $g_k(t) \underset{0}{=} o(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}})$, avec $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}$ intégrable au voisinage de 0, intégrale de Riemann au voisinage de 0 avec $1 - \frac{a}{2} < 1$, donc convergente) et donc g_k est intégrable au voisinage de 0.
Au voisinage de $+\infty$,

$$0 \leq g_k(t) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2}) \tag{4.3}$$

car $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 g_k(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t^{b+1}(\ln t)^k}{e^t} = 0$ par croissance comparée.
Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, intégrale de Riemann convergente au voisinage de $+\infty$ car $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (4.3) que g_k est intégrable au voisinage de $+\infty$.
D'où g_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par suite, d'après le Corollaire 2, Γ est de classe C^∞ sur $]a, b[$, $\forall 0 < a < b < +\infty$ donc sur $]0 + \infty[= \bigcup\limits_{0<a<b<+\infty}]a, b[$ et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \forall x > 0, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x)\, dt = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

4. Montrons que Γ est strictement convexe. D'après 3., on a

$$\forall x > 0, \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}\, dt \geq 0$$

car $\forall x > 0$, $\forall t > 0$, $(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} \geq 0$.
Donc Γ est convexe. Montrons qu'elle est strictement convexe.
Soit $x > 0$. Supposons que

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)\, dt = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}\, dt = 0. \tag{4.4}$$

Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(., x) : t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$, on déduit alors de (4.4) que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(., x) = 0$ sur $]0, +\infty[$, absurde car pour tout $t > 0$, $t \neq 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) > 0$.
D'où $\Gamma''(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et donc Γ est strictement convexe.

5. Montrons que Γ est log-convexe càd montrons que $\ln \circ \Gamma$ est convexe.
Notons tout d'abord que $\ln \circ \Gamma$ est bien définie sur $]0, +\infty[$ car Γ est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

En effet, soit $x > 0$. On a $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_x(t)dt \geq 0$ car $f_x \geq 0$ sur $]0, +\infty[$.
Supposons que $\Gamma(x) = 0$. Comme f_x est continue, positive, on aurait alors $f_x = 0$ sur $]0, +\infty[$, absurde car pour tout $t > 0$, $f_x(t) > 0$.
On a en plus $\ln \circ \Gamma$ est C^2 (même C^∞) sur $]0, +\infty[$, car $\ln$ et Γ le sont, avec

$$\forall x > 0,\ (\ln \circ \Gamma)'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

et donc

$$\forall x > 0,\ (\ln \circ \Gamma)''(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)}.$$

Or d'après 3. et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma'^2(x) &= \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)\, t^{x-1} e^{-t}\, dt\right)^2 \\
&= \left(\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t^{x-1}e^{-t}}\right) \left(\ln t \sqrt{t^{x-1}e^{-t}}\right)\, dt\right)^2 \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt\right) \left(\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}\, dt\right) \\
&= \Gamma(x)\Gamma''(x).
\end{aligned}$$

On en déduit alors que $\forall x > 0,\ (\ln \circ \Gamma)''(x) = \dfrac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)} \geq 0$. Par suite $\ln \circ \Gamma$ est convexe i.e. Γ est log-convexe.

6. a) i) Soit $x > 0$. On a $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, \mathrm{d}t$. Par intégration par parties, $(u(t) = t^x,\ v'(t) = e^{-t})$, on obtient

$$\Gamma(x+1) = \lim_{T \to +\infty} [-t^x e^{-t}]_{t=0}^{t=T} + x\Gamma(x) = x\Gamma(x)$$

car $\displaystyle\lim_{T \to +\infty} -T^x e^{-T} = 0$ par croissance comparée.

b) D'après a), on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ i.e.

$$\forall n \geq 2, \quad \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

avec $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, \mathrm{d}t = \lim_{T \to +\infty} [-e^{-t}]_{t=0}^{t=T} = 1.$

1ère méthode :
On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!. \tag{4.5}$$

En effet :
- Initialisation : (4.5) est vraie pour $n = 1$, $\Gamma(1) = 1 = 0!$.

-Hérédité : Supposons que (4.5) est vraie pour $n \geq 1$ i.e. $\Gamma(n) = (n-1)!$ et montrons qu'elle reste vraie pour $n+1$ i.e. montrons que $\Gamma(n+1) = n!$.
D'après a), $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$.
Par suite, d'après le principe de récurrence, (4.5) est vraie pour tout $n \geq 1$.

2ème méthode :
On a $\forall n \geq 2$, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$, donc

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n-1) = (n-2)\Gamma(n-2)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$$

En multipliant ces $n-1$ égalités, on obtient pour tout $n \geq 2$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
C'est aussi vrai pour $n = 1$, par suite pour tout $n \geq 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

ii) Cherchons un équivalent de Γ en 0.
On a $\forall x > 0$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ donc

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1). \tag{4.6}$$

Comme d'après 2., Γ est continue sur $]0, +\infty[$ et donc en particulier en 1, on a alors $\lim\limits_{x \to 0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$.
Par suite, on déduit de (4.6) que $\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

c) On a d'après 6.b),ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} \Gamma(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

7. On a
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt.$$
Avec le changement de variables $u = \sqrt{t}$ ($t = u^2$),
$du = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2u}dt \iff dt = 2udu$, $t = 0 \iff u = 0$, $t \to +\infty \iff u \to +\infty$, on obtient
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2udu = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

8. Puisque la fonction Γ'' est strictement positive sur $]0, +\infty[$ (d'après 4.), la fonction Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
D'autre part, Γ est continue sur $[1, 2]$ et dérivable sur $]1, 2[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$) avec $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ (d'après 6.). Par suite, d'après le théorème de Rolle, il existe

$x_0 \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(x_0) = 0$. Comme Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, on déduit que Γ' est strictement négative sur $]0,x_0[$ et strictement positive sur $]x_0,+\infty[$.
On a donc montré qu'il existe $x_0 \in]1,2[$ tel que Γ est strictement décroissante sur $]0,x_0[$ et est strictement croissante sur $[x_0,+\infty[$.

Cherchons $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x)$.
Comme la fonction Γ est (strictement) croissante sur $[2,+\infty[$, on a d'après 6., pour tout $x \geq 3$,

$$\Gamma(x) \geq (x-1)\Gamma(x-1) \geq (x-1)\Gamma(2) = x-1.$$

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.
De plus, toujours d'après 6., pour tout $x > 1$, $\dfrac{\Gamma(x)}{x} = \dfrac{x-1}{x}\Gamma(x-1) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$). On en déduit que le graphe de Γ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $(y'y)$.
Allure du graphe de Γ :

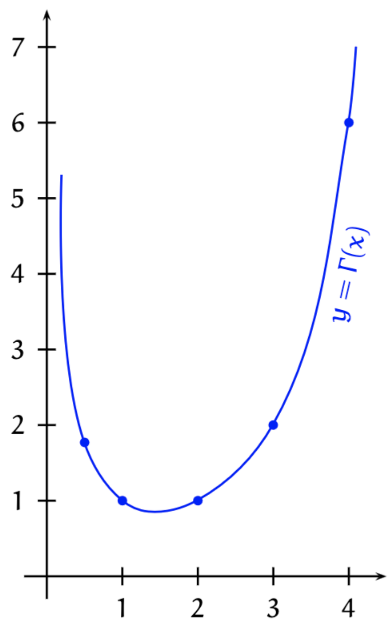

FIGURE 4.1 – graphe de Γ