Chapitre 3

Séries entières

Les séries entières sont des séries de fonctions de forme particulière. Nous étudierons leur convergence, régularité et verrons qu'elles sont bien adaptées à l'opération de dérivation et donc à la résolution d'équations différentielles. Nous verrons aussi que la plupart des fonctions usuelles peuvent s'écrire sous forme d'une somme d'une série entière (en 0).

3.1 Convergence des séries entières

Définition 1

On appelle série entière de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série de fonctions de la forme $\sum_{n\geq 0} f_n$ avec pour tout n,
$f_n : z \in \mathbb{C} \to a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels ou de complexes. Par abus de notation, on notera cette série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$

L'ensemble $\mathcal{D}$ des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge est appelé **domaine de convergence** de la série entière.
La fonction $S : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est appelée **la somme** de cette série entière.

Exemple :

Un exemple de base de série entière est la **série géométrique** $\sum_{n\geq 0} z^n$.

On a $\mathcal{D} = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ et

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots = \frac{1}{1-z}.$$

Proposition 1

(Lemme d'Abel) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration. On suppose $z_0 \neq 0$, pour $z_0 = 0$, il n'y a rien à montrer car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 0$.
Comme la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, il existe alors $M \geq 0$ tel que $|a_n z_0^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |a_n z^n| \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Comme $0 \leq q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$ alors la série géométrique $\sum_n q^n$ converge et par suite la série $\sum_n |a_n z^n|$ converge aussi ce qui n'est autre que la convergence absolue de $\sum_n a_n z^n$. □

Définition 2

On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum_n a_n z^n$

$$R = \sup\{r \geq 0;\ (a_n r^n)_n \text{ est bornée }\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

avec la convention suivante : si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et non majorée, $\sup A = +\infty$.

Exemple :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_n z^n$ est

$$R = \sup\{r \geq 0;\ (r^n)_n \text{ est bornée }\} = \sup[0,1] = 1.$$

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{z^n}{n!}$ est

$$R = \sup\{r \geq 0; \left(\frac{r^n}{n!}\right)_n \text{ est bornée } \} = \sup \mathbb{R}^+ = +\infty.$$

En effet, posons pour tout $r > 0$, $u_n = \frac{r^n}{n!}$. On montre avec la règle de D'Alembert que $\sum_n u_n$ converge et donc en particulier $\lim_n u_n = 0$. Par suite, $(u_n)_n = \left(\frac{r^n}{n!}\right)_n$ est bornée pour tout $r > 0$, c'est aussi vrai pour $r = 0$.
D'où $R = \sup \mathbb{R}^+ = +\infty$.

Proposition 2

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ vaut

$$R = \sup\{r \geq 0; (a_n r^n)_n \text{ converge vers } 0\}$$

Démonstration. Notons

$$I := \{r \geq 0; (a_n r^n)_n \text{ est bornée } \}$$

et

$$J := \{r \geq 0; (a_n r^n)_n \text{ converge vers } 0\}.$$

Par définition $R = \sup I$. Montrons que $R = \sup J$.
On a $J \subset I$ (trivial) et donc $\sup J \leq \sup I = R$.
Remarquons aussi que si $I = \{0\}$ alors $J = I = \{0\}$ et donc $R = \sup I = \sup J = 0$.
Supposons donc $I \neq \{0\}$ et soit $r \in I$, $r > 0$. On a alors

$$\forall\, 0 \leq s < r, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n s^n| = |a_n r^n|\, (\frac{s}{r})^n \leq M(\frac{s}{r})^n \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Par suite $\lim_n a_n s^n = 0$, c'est-à-dire $s \in J$, $\forall 0 \leq s < r$.
On a donc montré $[0, r[\subset J$ pour tout $r \in I$, $r > 0$, ce qui nous donne $\sup J \geq r$, $\forall r \in I$.
D'où $\sup J \geq \sup I = R$.
Par suite, $\sup J = R$. $\square$

Remarque 1

Remarquons que

- $0 \in I,\ J$ où $I := \{r \geq 0;\ (a_n r^n)_n \text{ est bornée }\}$ et $J := \{r \geq 0;\ (a_n r^n)_n \text{ converge vers } 0\}$ $(R = \sup I = \sup J)$.
- I et J sont des intervalles, donc de la forme $[0, R[$ ou $[0, R]$, car si $r_0 \in I$ (respectivement $r_0 \in J$), alors pour tout $0 \leq r < r_0$, $r \in I$ (respectivement $r \in J$).
  On a
  $$[0, R[\subset J \subset I \subset [0, R].$$

Proposition 3

(Caractérisation du rayon de convergence) Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière et soit $R \geq 0$.

On a équivalence entre

1. R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
   i) Si $|z| < R$, alors la série numérique $\sum_n a_n z^n$ converge absolument,
   ii) Si $|z| > R$, alors la série numérique $\sum_n a_n z^n$ diverge grossièrement, plus précisément $a_n z^n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$.

Précision : si $R = 0$, le point 2. se réduit à ii) : la série numérique $\sum_n a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.
Si $R = +\infty$, le point 2. se réduit à i) : la série converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $1 \Rightarrow 2$.
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Si $|z| < R$ (avec $R \neq 0$), il existe alors r tel que $|z| < r < R$ et $(a_n r^n)_n$ est bornée. Par suite, d'après la Proposition 1, la série numérique $\sum_n a_n z^n$ converge absolument.
Si $|z| > R$ (avec $R \neq +\infty$), alors $|z| \notin I$. On a donc $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée et par suite ne converge pas vers 0, d'où $\sum_n a_n z^n$ diverge grossièrement.

Montrons maintenant que $2 \Rightarrow 1$.
Notons R_a le rayon de convergence de la série entière et montrons que $R = R_a$.
D'après i), pour tout $0 \leq r < R$ (avec $R \neq 0$), $a_n r^n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et donc $r \in J$. Par suite $R_a = \sup J \geq R$.
D'autre part, d'après ii), pour tout $r > R$ (avec $R \neq +\infty$), $a_n r^n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$ et donc $r \notin J$. Par suite $R_a = \sup J \leq R$.
On déduit donc que $R_a = R$. $\square$

Corollaire 1

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Son domaine de convergence $\mathcal{D}$ vérifie alors

i) Si $R = 0$, alors $\mathcal{D} = \{0\}$.

ii) Si $R = +\infty$, alors $\mathcal{D} = \mathbb{C}$.

iii) Si $R \in]0, +\infty[$, alors $D(0,R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{D(0,R)}$ où $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, qu'on appellera **disque ouvert de convergence** et $\overline{D(0,R)} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R\}$ le disque fermé de centre 0 et de rayon R.

Il n'y a pas de résultat général sur la convergence de la série entière sur son cercle de convergence $\mathscr{C}(0,R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| = R\}$, ça dépend de la série.

Exemple :

On a vu que le rayon de convergence de la série entière $\sum_n z^n$ est $R = 1$. On a donc $D(0,1) \subset \mathcal{D} \subset \overline{D(0,1)}$.
Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ ($z \in \mathscr{C}(0,1)$). La série numérique $\sum_n z^n$ diverge grossièrement car $|z^n| = |z|^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \neq 0$. Par suite $\mathcal{D} = D(0,1)$.

Exemple :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq1} \frac{z^n}{n}$ est $R = 1$ (à vérifier). Donc $D(0,1) \subset \mathcal{D} \subset \overline{D(0,1)}$.
Soit maintenant $z \in \mathscr{C}(0,1)$.
Si $z = 1$, $\sum_{n\geq1} \frac{z^n}{n} = \sum_{n\geq1} \frac{1}{n}$ diverge.

Si $z \neq 1$, on va montrer avec la règle d'Abel que $\sum_{n\geq1} \frac{z^n}{n}$ converge. En effet :

- La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq1}$ est réelle, décroissante et converge vers 0.
-Pour tout $n \geq 1$,

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} z^k\right| = \left|z \times \frac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \frac{|1| + |z|^n}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|} = M$$

avec M indépendant de n. On déduit donc d'après la règle d'Abel que $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ converge.

Par suite $\mathcal{D} = \overline{D(0,1)} \setminus \{1\}$.

Exemple :

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ est $R = 1$ (à vérifier). Donc $D(0,1) \subset \mathcal{D} \subset \overline{D(0,1)}$.

Soit maintenant $z \in \mathscr{C}(0,1)$. On a $\sum_{n\geq 1} \frac{|z^n|}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ et donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ est absolument convergente et donc en particulier convergente. Par suite $\mathcal{D} = \overline{D(0,1)}$.

Théorème 1

Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement et donc uniformément, sur tout disque fermé centré en 0 et de rayon $r < R$ et plus généralement sur toute partie compacte incluse dans le disque ouvert de convergence $D(0,R)$.

Démonstration. Soit $0 \leq r < R$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leq \sup_{z\in\overline{D(0,r)}} |a_n z^n| = \sup_{z\in\overline{D(0,r)}} |a_n|\,|z|^n \leq |a_n| r^n. \tag{3.1}$$

Comme $\sum_n |a_n| r^n$ converge (Proposition 3), on déduit de (3.1), la convergence normale de $\sum_n a_n z^n$ sur $\overline{D(0,r)}$.

Si K est un compact de $\mathbb{C}$ (fermé, borné) inclus dans $D(0,R)$, alors $r_0 = \sup_{z\in K} |z|$ est atteint en un $z_0 \in K$ et on a donc $0 \leq r_0 < R$. Comme $K \subset \overline{D(0,r_0)}$, on obtient le résultat voulu. □

Remarque 2

Attention à considérer un rayon $r < R$. Il se peut qu'il n'y ait pas de convergence normale sur $D(0,R)$.

Un exemple : la série entière $\sum_n z^n$. Elle ne converge ni normalement ni même uniformément sur son disque de convergence $D(0,1)$ car $\sup_{|z|<1} |z^n| = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ et donc si on note $f_n : z \to z^n$, $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $D(0,1)$ (condition nécessaire pour avoir la convergence normale et uniforme de $\sum_n f_n$ sur $D(0,1)$).

Corollaire 2
La somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur son disque ouvert de convergence $D(0,R)$.

3.1.1 Calcul du rayon de convergence

Théorème 2
(Règle de D'Alembert pour les séries entières)
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière tel que les a_n sont tous non nuls à partir d'un certain rang (i.e. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n \neq 0$) .
Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\geq n_0}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ quand $n \to +\infty$, alors le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$ est $R = \frac{1}{l}$ avec les conventions $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$.

Démonstration. Notons que pour $z = 0$, la série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Comme $a_n \neq 0, \forall n \geq n_0$, on peut appliquer la Règle de D'Alembert à la série numérique $\sum_n a_n z^n$. On a

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \underset{n\to+\infty}{\to} l|z|.$$

1) Si $l = 0$, le critère de D'Alembert pour les séries numériques garantit alors que la série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et donc converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par suite, $R = +\infty$.
2) Si $l = +\infty$, ce même critère montre que la série diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ (elle converge absolument en $z = 0$). Par suite, $R = 0$.
3) Si $0 < l < +\infty$, alors d'après la règle de D'Alembert, la série converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $l|z| < 1$ et diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $l|z| > 1$. On conclut donc
   i) $\forall z \in \mathbb{C}; |z| < \frac{1}{l}$, la série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument (et donc $R \geq \frac{1}{l}$),
   ii) $\forall z \in \mathbb{C}; |z| > \frac{1}{l}$, la série $\sum_n a_n z^n$ diverge grossièrement (et donc $R \leq \frac{1}{l}$).

Par suite, d'après Proposition 3, $R = \dfrac{1}{l}$.

□

On a un résultat similaire avec le critère de Cauchy :

Théorème 3

(Règle de Cauchy pour les séries entières)
Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. Si la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ quand $n \to +\infty$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est $R = \dfrac{1}{l}$ avec les conventions $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ et $\dfrac{1}{0} = +\infty$.

Séries entières lacunaires : Ce sont des séries entières dont une infinité de coefficients sont nuls, comme les séries de fonctions de la forme $\sum_n b_n z^{2n}$, ou plus généralement $\sum_n b_n z^{kn}$ avec $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2,\ \sum_n b_n z^{n!},\ \sum_n b_n z^{n^2}$....
Pour trouver le rayon de convergence de ces séries, on utilise une des deux définitions du rayon de convergence ou la caractérisation du rayon de convergence de la Proposition 3, on verra des exemples en TD.

Proposition 4

Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a, R_b.

1. Si $a_n \underset{+\infty}{=} O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.
2. Si $a_n \underset{+\infty}{=} o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.
3. Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration. Par définition, $R_a = \sup I_a$, $R_b = \sup I_b$ où $I_a := \{r \geq 0;\ (a_n r^n)_n \text{ est bornée }\}$ et $I_b := \{r \geq 0;\ (b_n r^n)_n \text{ est bornée }\}$.

1. Si $a_n \underset{+\infty}{=} O(b_n)$, il existe alors un réel $K \geq 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n| \leq K|b_n|$ pour tout $n \geq n_0$. On a donc
$$\forall r \geq 0, \forall n \geq n_0, \quad |a_n r^n| \leq K|b_n r^n|. \tag{3.2}$$
On déduit de (3.2) que $I_b \subset I_a$.
Par suite, $R_a = \sup I_a \geq R_b = \sup I_b$.
2. Si $a_n \underset{+\infty}{=} o(b_n)$ alors $a_n \underset{+\infty}{=} O(b_n)$ et on utilise 1.

3. Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ alors $a_n \underset{+\infty}{=} O(b_n)$ et $b_n \underset{+\infty}{=} O(a_n)$). En utilisant 1., on obtient donc $R_a \geq R_b$ et $R_b \geq R_a$). D'où $R_a = R_b$.

□

Proposition 5

Les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Démonstration. Notons R et R' les rayons de convergence respectifs. Comme $a_n \underset{+\infty}{=} o(na_n)$, alors $R \geq R'$.
Montrons maintenant que $R \leq R'$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Prenons $r > 0$ tel que $|z| < r < R$. On a alors

$$\forall n, \quad n a_n z^n = n(\frac{z}{r})^n a_n r^n.$$

Par croissance comparée, on a $\lim_n n(\frac{z}{r})^n = 0$ et donc la suite $(n(\frac{z}{r})^n)_n$ est bornée. On obtient donc

$$\forall n, \quad 0 \leq |n a_n z^n| \leq C|a_n| r^n. \tag{3.3}$$

Comme $\sum_n a_n r^n$ est absolument convergente car $r < R$, on déduit de (3.3) que $\sum_n |n a_n z^n|$ est convergente.
On a donc montré que $\sum_n n a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a alors $R' \geq R$.
Par suite $R = R'$. □

Corollaire 3

Toutes les séries entières $\sum_n n^\alpha a_n z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ont le même rayon de convergence.

Démonstration. Pour $\alpha = k \in \mathbb{Z}$, la preuve est identique à celle de la Proposition 5.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq \alpha < k + 1$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^k |a_n| \leq n^\alpha |a_n| \leq n^{k+1} |a_n|.$$

Comme les deux séries $\sum_n n^k a_n z^n$ et $\sum_n n^{k+1} a_n z^n$ ont le même rayon de convergence, en utilisant $1.$ de la Proposition 4, on obtient le résultat. □

3.1.2 Somme et produit de deux séries entières

Théorème 4

(Somme de deux séries entières) Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a, R_b. La série entière $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ est appelée la série somme de ces deux séries entières. Notons R son rayon de convergence. On a alors

$$R \geq \min(R_a, R_b)$$

avec

$$R = \min(R_a, R_b) \quad \text{si} \quad R_a \neq R_b.$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. On a alors $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ convergent absolument, par suite la série numérique $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ converge absolument comme somme de deux séries absolument convergentes. Donc $R \geq \min(R_a, R_b)$.
Si $R_a \neq R_b$, on peut supposer par exemple $R_a < R_b$ (on fait pareil si $R_b < R_a$).
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_a < |z| < R_b$. On a alors $\sum_n a_n z^n$ diverge grossièrement et $\sum_n b_n z^n$ converge absolument et donc $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ diverge (grossièrement) comme somme d'une série (absolument) convergente et d'une série divergente (grossièrement).
Par suite, $R \leq R_a = \min(R_a, R_b)$. D'où $R = \min(R_a, R_b)$.
La dernière assertion découle de la propriété de somme des séries numériques convergentes. En effet, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. On a alors

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + \sum_{n=0}^{N} b_n z^n.$$

Comme les deux séries sont convergentes (leur suite de sommes partielles sont convergentes), on obtient en passant à la limite quand $N \to +\infty$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

$\square$

Remarque 3

On peut avoir $R > \min(R_a, R_b)$. Par exemple, considérons les deux séries entières $\sum_n z^n$ et $\sum_n -z^n$. On a $a_n = 1 = -b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $R_a = R_b = 1$. Alors que $\sum_n (a_n + b_n) z^n = \sum_n 0 = 0$ a comme rayon de convergence $R = +\infty > \min(R_a, R_b) = 1$.

Théorème 5

(Série produit de deux séries entières) Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a, R_b. On appelle série produit de ces deux séries entières, la série entière $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

On note R le rayon de convergence de cette série. On a alors

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Démonstration. On remarque que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n z^n = \sum_{k=0}^{n} (a_k z^k)(b_{n-k} z^{n-k}).$$

La série $\sum_n c_n z^n$ est donc le produit de Cauchy des deux séries numériques $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$. On sait donc qu'elle converge absolument quand les deux séries convergent absolument. Comme $\sum_n a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$ et $\sum_n b_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_b$, on déduit donc que $\sum_n c_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Par suite $R \geq \min(R_a, R_b)$. Le reste découle de la somme de la série produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes. $\square$

Remarque 4
Même si $R_a \neq R_b$, on n'a pas forcément $R = \min(R_a, R_b)$. Considérons par exemple $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geq 2$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ avec $b_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a $R_a = +\infty$ (car $a_n = 0$ pour tout $n \geq 2$) et $R_b = 1$. Donc $R_a \neq R_b$.
Notons $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ la série produit. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

On déduit dont que $c_0 = 1$ et $c_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.
Par suite $R = +\infty \neq \min(R_a, R_b) = 1$.

3.2 Séries entières réelles

On s'intéresse dans cette partie aux séries entières où la variable z est réelle (on la notera x), les $(a_n)_n$ peuvent être complexes. Commençons par résumer les résultats obtenus ci-dessus dans le cas d'une série entière réelle :

Théorème 6
Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière à variable réelle, de rayon de convergence R et notons $\mathcal{D}$ son domaine de convergence. On a alors

1. Si $R = 0$, $\mathcal{D} = \{0\}$,
2. Si $R = +\infty$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$,
3. Si $0 < R < +\infty$, $]-R, R[\subset \mathcal{D} \subset [-R, R]$ et la série converge absolument sur $]-R, R[$, diverge grossièrement sur $]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$.
   Pour déterminer $\mathcal{D}$, il reste à étudier la convergence des séries numériques $\sum_n a_n(-R)^n$ et $\sum_n a_n R^n$.
4. Supposons $R > 0$. Alors la série entière $\sum_n a_n x^n$ converge normalement sur tout intervalle $[-r, r]$ avec $0 \leq r < R$ et en général sur toute partie compacte (fermée, bornée) incluse dans $]-R, R[$.
5. Supposons $R > 0$. La somme S de la série entière est continue sur $]-R, R[$.

Théorème 7

(Intégrale de la somme d'une série entière réelle) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière à variable réelle, de rayon de convergence $R>0$ et $[a,b]$ un segment inclus dans $]-R,R[$. Alors

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b a_n x^n dx\right).$$

Démonstration. Soient $a,\ b\in\mathbb{R}$ tel que $[a,b]\subset]-R,R[$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n : x\mapsto a_n x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[a,b]$.
D'autre part, $\sum_n f_n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment (compact) $[a,b]\subset]-R,R[$ d'après Théorème 6, 4.
Par suite, d'après le Chapitre 2, Théorème 6, on peut intervertir somme et intégrale et on obtient le résultat. □

Définition 3

On appelle série entière primitive de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Corollaire 4

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R>0$. Alors la série entière primitive $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a le même rayon de convergence et sa somme sur $]-R,R[$ est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction somme $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En d'autres termes,

$$\forall x\in]-R,R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x S(t)dt.$$

Démonstration. Le fait que les deux séries entières ont le même rayon de convergence est évident d'après le Corollaire 3.
Soit $x\in]-R,R[$.

i) Si $0<x<R$, on obtient directement d'après Théorème 7, en intégrant S sur $[0,x]\subset\ ]-R,R[$, que $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

ii) Si $-R < x < 0$. On a $\int_0^x S(t)dt = -\int_x^0 S(t)dt$ puis on utilise le Théorème 7 sur $[x,0] \subset]-R,R[$.

iii) Si $x=0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} 0^{n+1} = 0 = \int_0^0 S(t)dt$.

□

Exercice 1

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1}$.

Correction de l'Exercice 1 : On a $\sum_{n\geq 0} x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R=1$ (déjà vu, on a aussi $\mathcal{D} =]-1,1[$ car $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ et $\sum_{n\geq 0} 1^n = \sum_{n\geq 0} 1$ diverge grossièrement) avec pour tout $x \in]-1,1[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Sa série entière primitive $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ a donc le même rayon de convergence $R=1$ et on a d'après le Corollaire 4, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}x^{n+1} = \int_0^x S(t)dt$.

En particulier, pour $x = \frac{1}{2} \in]-1,1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t}dt = [-\ln|1-t|]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} = \ln 2$.

Définition 4

On appelle série entière dérivée (ou dérivée 1ère) de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la série entière

$$\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

Et plus généralement, on appelle série entière dérivée p-ième, $p \in \mathbb{N}^*$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la série entière

$$\sum_{n\geq p} n(n-1)...(n-p+1)a_n x^{n-p} = \sum_{n\geq 0}(n+p)...(n+1)a_{n+p}x^n.$$

Théorème 8

(Dérivabilité et caractère C^∞ de la somme d'une série entière réelle) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$, et de somme

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Alors la fonction S est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et on obtient ses dérivées successives par dérivation terme à terme de la fonction S.
Toutes les séries entières dérivées ont le même rayon de convergence R que $\sum_n a_n x^n$ et on a

1. $\forall x \in]-R, R[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$
2. $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-R, R[,$

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)...(n-p+1) a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)...(n+1) a_{n+p} x^n$$

avec la convention que le produit $\prod_{k=0}^{p-1} (n-k)$ devant a_n (respectivement le produit $\prod_{k=1}^{p} (n+k)$ devant a_{n+p}) vaut 1 si $p = 0$.

Démonstration. Le fait que toutes les séries entières dérivées de $\sum_n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence est évident d'après le Corollaire 3.
On va commencer par montrer que S est C^1 sur $]-R, R[$.

1. i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est C^∞ sur $]-R, R[$ et donc en particulier C^1 avec pour tout $x \in]-R, R[$, $f_0'(x) = 0$ et pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in]-R, R[$, $f_n'(x) = n a_n x^{n-1}$.
   ii) La série entière $\sum_n f_n$ converge simplement sur $]-R, R[$.
   iii) La série entière (dérivée 1ère) $\sum_n f_n'$, de rayon de convergence R, converge normalement et donc uniformément sur tout segment $[a, b] \subset]-R, R[$ (voir Théorème 6, 4.).

   Alors, d'après le Théorème 8 (des séries de fonctions de classe C^1) du Chapitre 2, S est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et on a

$$\forall x \in]-R, R[, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

2. Même preuve, en utilisant cette fois le Théorème 9 (des séries de fonctions de classe C^p) du Chapitre 2, on montre que S est C^p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ (donc C^∞) sur $]-R, R[$ et que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-R, R[, \quad S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)...(n-p+1)a_n x^{n-p}.$$

□

☆ Théorème 9

(Calcul des coefficients d'une série entière) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Démonstration. D'après le Théorème 8, pour tout $p \in \mathbb{N}$, en prenant $x = 0 \in]-R, R[$, on a

$$S^{(p)}(0) = p!\, a_p.$$

□

☆ Corollaire 5

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ deux séries entières réelles de rayon de convergence respectifs $R_a > 0$, $R_b > 0$ et de fonction somme respectifs S_a, S_b . On suppose qu'il existe un voisinage V de 0 sur lequel $S_a = S_b$ i.e.

$$\forall x \in V, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Démonstration. D'après l'hypothèse, il existe $0 < r \leq \min(R_a, R_b)$ tel que

$$\forall x \in]-r, r[,\ S_a(x) = S_b(x). \tag{3.4}$$

La série entière $\sum_{n\geq 0}(a_n - b_n)x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$. Sa somme $S_a - S_b$ est nulle sur $]-r, r[$ d'après (3.4) et donc toutes ses dérivées sont également nulles sur $]-r, r[$, notamment en 0. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 = (S_a - S_b)^{(n)}(0) = n!(a_n - b_n).$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$. □

Exercice 2

On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence puis le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de cette série.
2. On note S sa somme sur $\mathcal{D}$. Montrer que S est continue.
3. Expliciter S sur $]-R,R[$.
4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Correction de l'Exercice 2 :

1. On a $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$. En appliquant la règle de D'Alembert, on a
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} l = 1$$
et donc $R = \frac{1}{l} = 1$.
On a donc $]-1,1[\subset \mathcal{D} \subset [-1,1]$. Reste à étudier la convergence des deux séries numériques $\sum_{n\geq 1} a_n x_i^n$, $i = 0,1$ avec $x_0 = -1$, $x_1 = 1$.
   i) On a $\sum_{n\geq 1} a_n x_0^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n = \sum_{n\geq 1} \frac{-1}{n}$ diverge car série de Riemann avec $\alpha = 1$.
   ii) Et $\sum_{n\geq 1} a_n x_1^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ série alternée qui vérifie le CSSA (à vérifier) et donc converge.

   Par suite, $\mathcal{D} =]-1,1]$.
2. a. D'après Théorème 6, 5., S est continue sur $]-R,R[=]-1,1[$.
   b. Reste à étudier la continuité de S en 1.
   Considérons pour tout $n \geq 1$, $f_n : x \to \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.
   Pour montrer la continuité de S en 1, on va appliquer le Théorème de continuité de la fonction somme d'une série de fonctions du Chapitre 2 à $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur un intervalle approprié I de $]-1,1]$ contenant 1 (I est à déterminer).

   Notons que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]-1,1]$ car pour tout $n \geq 1$, $\|f_n\|_{\infty,]-1,1]} = \frac{1}{n}$ et la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

On va utiliser le critère de convergence uniforme des séries alternées et montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVU sur $[0,1]$ (attention pour $x<0$, la série n'est pas alternée).
Pour tout $x \in [0,1]$, $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une série alternée car pour tout $n \geq 1$, $(-1)^n f_n(x) = -\dfrac{x^n}{n} \leq 0$ (garde un signe constant), avec

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq |f_n(x)| = \frac{1}{n}x^n \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x)| = 0$.
D'autre part, montrons que $(|f_n(x)|)_{n\geq 1}$ est décroissante. On a

$$\forall n \geq 1, \quad |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \leq \frac{1}{n}x^n = |f_n(x)|$$

car pour $0 \leq x \leq 1$, $x^{n+1} \leq x^n$.
Par suite, pour tout $n \geq 1$, $|f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)|$. D'où $(|f_n(x)|)_{n\geq 1}$ est décroissante.
On a donc montré que pour tout $x \in [0,1]$, la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ vérifie le CSSA et par suite converge i.e. $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVS sur $[0,1]$ (on le savait déjà d'après 1.) et de plus pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|$ et donc

$$\forall n \geq 1, \sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f_{n+1}(x)|. \tag{3.5}$$

Comme $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVS sur $[0,1]$, montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVU sur $[0,1]$ est équivalent à montrer que la suite de fonctions reste $(R_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Et donc d'après (3.5), il suffit de montrer que $(f_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1]} \dfrac{1}{n}x^n = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (on a utilisé le fait que $x \mapsto \dfrac{x^n}{n}$ est croissante sur $[0,1]$).
D'où $(f_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur $[0,1]$ et donc, d'après (3.5), $(R_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Par suite $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVU sur $[0,1]$.
On a alors

ii) pour tout $n \geq 1$, f_n continue sur $[0,1]$ (car polynomiale),
i) la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVU sur $[0,1]$.

Par suite, d'après le Théorème 5 du Chapitre 2, S est continue sur $[0,1]$ et donc en particulier en 1.

On déduit de a. et b. que S est continue sur $]-1,1[\cup\{1\}=]-1,1] = \mathcal{D}$.

3. **1ère façon :**
La série entière dérivée 1ère de $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ est la série entière $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+2}x^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ de même rayon de convergence $R = 1$ et sa fonction somme S_1 vérifie pour tout $x \in]-1,1[$, $S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \frac{1}{1+x}$.
D'après Théorème 8, on a alors pour tout $x \in]-1,1[$, $S'(x) = S_1(x) = \frac{1}{1+x}$.
Par suite, pour tout $x \in]-1,1[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = \ln|1+x|+C = \ln(1+x)+C$ $\big(1+x>0$ pour $-1<x<1\big)$ avec $C \in \mathbb{R}$ à déterminer.
Comme $S(0) = a_0 = 0$, on déduit que $C = 0$ et donc $S(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

2ème façon de rédaction :
La série entière $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ est la série entière primitive de $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ de rayon de convergence $R = 1$ et de somme S_1 avec pour tout $x \in]-1,1[$, $S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \frac{1}{1+x}$. Par suite, d'après le Corollaire 4, on a

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \\ &= \int_0^x S_1(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt \\ &= [\ln|1+t|]_{t=0}^{t=x} = \ln|1+x| = \ln(1+x).\end{aligned}$$

4. On a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = S(1)$. Comme S est continue sur $\mathcal{D} =]-1,1]$ et donc en 1, on déduit de 3. que $S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-}\ln(1+x) = \ln(2)$.
D'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

3.3 Fonctions développables en séries entières

Définition 5

Soit $X \subset \mathbb{C}$ un voisinage de 0 et $f : X \to \mathbb{C}$.
On dit que f est développable en série entière en 0 (ou autour de 0) s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un $r \in]0, R]$ avec $D(0,r) \subset X$, tel que

$$\forall z \in D(0,r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Dans ce cas, on appelle $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ le développement en série entière de f en 0.
On justifiera plus loin que le développement en série entière d'une fonction (s'il existe) est unique.

Définition 6

Soit $X \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : X \to \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière en $z_0 \in X$ (ou autour de z_0) si la fonction $w \mapsto f(z_0 + w)$ est développable en série entière en 0. Dans ce cas, on appelle développement en série entière de f en z_0 la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$ telle que pour tout z dans un voisinage de z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Exemple :

1. La fonction
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \dfrac{1}{1-z} \end{array}$$
est développable en série entière en 0 car pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1 = r$,
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$
avec ici le rayon de convergence R de la série entière $\sum_n z^n$ est $R = 1 = r$.
2. La fonction somme d'une série entière est développable en série entière en 0 sur $D(0,R)$ où R est le rayon de convergence de la série entière.

Définition 7

1. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et f une fonction de $I \to \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière en 0, s'il existe une série entière réelle $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un $r \in]0, R]$ avec $]-r, r[\subset I$, tel que
$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
On appelle dans ce cas $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ le développement en série entière de f en 0.
2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière en $x_0 \in I$ si la fonction $t \mapsto f(x_0 + t)$ est développable en série entière en 0. Dans ce cas, on appelle développement en série entière de f en x_0 la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$ telle que pour tout x dans un voisinage de x_0
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Remarque 5

Si $f : X \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est développable en série entière en 0, alors la restriction $f|_{X\cap\mathbb{R}}$ est développable en série entière en 0 .

Définition 8

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞. On appelle série de Taylor de f en $x_0 \in I$, la série entière
$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Théorème 10

(Condition nécessaire de développement en série entière réelle) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{C}$ est développable en série entière en $x_0 \in I$ alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est C^∞ et le développement en série entière de f en x_0 est sa série de Taylor en x_0
$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Démonstration. i) Si $x_0 = 0$, comme f est développable en série entière en 0, il existe alors une série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0, R]$ tel que pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n := S(x)$.

D'après Théorème 8, S est de classe C^∞ sur $]-R, R[$. Comme $f = S$ sur $]-r, r[\subset]-R, R[$, on déduit alors que f est C^∞ sur $]-r, r[$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = S^{(n)}$ sur $]-r, r[$.

On déduit alors du Théorème 9 que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

et par suite le développement en série entière de f en 0 n'est autre que sa série de Taylor en 0.

ii) Si $x_0 \neq 0$, si f est développable en série entière en x_0 alors $g : t \mapsto f(x_0 + t)$ est développable en série entière en 0. On applique le cas précédent à g, il existe alors une série entière $\sum_n a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0, R]$ tel que pour tout $t \in]-r, r[$, $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n := S(t)$ et S est de classe C^∞ sur $]-R, R[$.

Comme $g = S$ sur $]-r, r[\subset]-R, R[$, on déduit alors que g est C^∞ sur $]-r, r[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}. \tag{3.6}$$

Pour tout $x \in I$, $f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = g(x - x_0)$. Comme g est C^∞ sur $]-r, r[$, par composition de fonctions C^∞, f est alors C^∞ sur $]x_0 - r, x_0 + r[$ ($x - x_0 \in]-r, r[\Leftrightarrow x \in]x_0 - r, x_0 + r[$).

Et on a pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x - x_0)$ et donc avec (3.6), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Par suite, le développement en série entière de f en x_0 n'est autre que la série de Taylor de f en x_0.

□

Remarque 6

Si f est développable en série entière en un point, alors son développement en série entière en ce point est unique d'après Théorème 10.

Attention!

Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est développable en série entière en $x_0 \in I$, alors f est C^∞ au voisinage de x_0 mais la réciproque est fausse. Il existe des fonctions C^∞ au voisinage d'un point x_0 qui ne sont pas développables en série entière en x_0.

Prenons par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

On montre que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas développable en série entière en 0 (voir TD).

Remarque 7

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Pour qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ indéfiniment dérivable au voisinage de $x_0 \in I$ soit développable en série entière en x_0, il est nécessaire et suffisant que la suite de fonctions reste de la formule de Taylor (Lagrange ou avec reste intégral) de f en x_0 converge simplement vers la fonction nulle sur un voisinage de x_0. Donc pour trouver le développement en série entière d'une fonction, on peut utiliser les formules de Taylor.

Voici une condition suffisante pour obtenir cela :

Théorème 11

Si f est C^∞ sur $]-r, r[$, $r > 0$, et s'il existe M, $a > 0$ tels que

$$\forall x \in]-r, r[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}(x)| \leq M a^n$$

alors f est développable en série entière en 0 sur $]-r, r[$.

Démonstration. Comme f est C^∞ sur $]-r, r[$, on a alors d'après la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $x \in]-r, r[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x) \tag{3.7}$$

avec

$$r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \int_0^1 \frac{(x-xu)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)xdu.$$

On a donc

$$|r_n(x)| \leq M \frac{a^{n+1}|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n du = M \frac{|x|^{n+1} a^{n+1}}{(n+1)!} = \alpha_n.$$

avec $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ car c'est le terme général d'une série numérique convergente (à vérifier).

Par suite $r_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (3.7), on obtient pour tout $x \in]-r, r[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

□

Théorème 12

1. Soit X un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soient $f, g : X \to \mathbb{C}$ deux fonctions développables en série entière en $z_0 \in X$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, λf, $f + g$ et fg sont développables en série entière en z_0.
2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière en $x_0 \in I$. Alors les dérivées succesives de f ainsi que les primitives de f sont développables en série entière en x_0 et leur développement en série entière s'obtient par dérivation (resp. intégration) terme à terme à partir de celui de f.

Théorème 13

(Cas de fonctions paires ou impaires) Soit f une fonction paire qui se développe en série entière en 0.
On a alors tous les termes d'indices impairs de son développement sont nuls.

De même, si une fonction impaire se développe en série entière en 0, on a alors tous les termes d'indices pairs de son développement sont nuls.

Démonstration. Soit f une fonction paire complexe (respectivement réelle) se développant en série entière réelle en 0. Il existe alors une série entière complexe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ (resp. réelle $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$) de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0, R]$ tel que

$$\forall z \in D(0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = f(-z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n z^n$$

$$(\text{resp.} \quad \forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n).$$

D'après l'unicité du développement en série entière d'une fonction en un point (voir Remarque 6), on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n a_n$ et donc tous les coefficients d'indices impairs sont nuls : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.

Par suite, $\forall z \in D(0, r),\ f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} z^{2k}$ (resp. $\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$).

On fait le même raisonnnement si f est impaire. $\square$

3.3.1 Développement en série entière des fonctions usuelles

Famille de l'exponentielle

Définition 9

On appelle exponentielle complexe, notée $\exp$, la fonction somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ qui est de rayon de convergence $R = +\infty$. Ainsi on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 6

1. Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z), \ \overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}), \ |\exp(z)| = \exp(Re(z))$$

Définition 10

On définit les fonctions cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique complexes de la manière suivante : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh}(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Toutes ces séries entières ont un rayon de convergence $R = +\infty$.

Remarque 8

On montre, en utilisant la formule de Taylor Lagrange, que pour $t \in \mathbb{R}$ l'exponentielle complexe n'est autre que l'exponentielle réelle, de même pour les fonctions cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique complexes.
De même, l'exponentielle complexe généralise la définition de $e^{it} = \cos t + i \sin t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

A partir de maintenant, on notera aussi e^z pour $\exp(z)$.

Développements en séries entières obtenus directement ou par intégration

Théorème 14

Voici le développement en série entière en 0 des fonctions usuelles suivantes, R est le rayon de convergence de la série obtenue.

$$\forall z \in \mathbb{C};\ |z| < 1, \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \qquad R = 1$$

$$\forall z \in \mathbb{C};\ |z| < 1, \qquad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n, \qquad R = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R};\ |x| < 1, \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad R = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R};\ |x| < 1, \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \qquad R = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R};\ |x| < 1, \qquad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad R = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R};\ |x| < 1, \qquad \operatorname{argth}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad R = 1$$

Démonstration. (A connaître)

1. On a déjà vu que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} z^n$ est $R = 1$ et on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$.
2. Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n$ est $R = 1$ et on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-z)^n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-z)^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(-z)^{n+1}}{1+z} = \frac{1}{1+z}$.
3. Notons $f : x \to \ln(1-x)$. On a $D_f =]-\infty, 1[$, f est C^1 (même C^∞) sur D_f avec pour tout $x < 1$, $f'(x) = -\frac{1}{1-x}$.

D'après 1.,

$$\forall x \in]-1,1[=]-r,r[, \quad f'(x) = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \tag{3.8}$$

et le rayon de convergence de la série entière $-\sum_{n\geq 0} x^n$ est $R=1$.
D'après (3.8) et Corollaire 4, on a pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x)-f(0) = \int_0^x \frac{-1}{1-t}dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

ce qui donne pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1-x)-\ln(1-0) = \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Comme $-\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la série entière primitive de $-\sum_{n\geq 0} x^n$, elle a alors le même rayon de convergence $R=1$.

4. Même preuve que 3., notons $f : x \to \ln(1+x)$. On a $D_f =]-1,+\infty[$, f est C^1 (même C^∞) sur D_f avec ici pour tout $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
5. Notons $f : x \to \arctan x$. On a $D_f = \mathbb{R}$, f est C^1 (même C^∞) sur D_f avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
D'après 2.,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x^2|<1 \ \text{ i.e. } \ \forall x \in \mathbb{R}, |x|<1=r, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \tag{3.9}$$

et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$ est $R=1$ ($R \geq r = 1$ et pour $x=1$ la série diverge grossièrement donc $R \leq 1$).
D'après (3.9) et Corollaire 4, on a alors pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x)-f(0) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

ce qui donne pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arctan x - \arctan 0 = \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Comme $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est la série entière primitive de $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$, elle a alors le même rayon de convergence $R=1$.

6. Notons $f : x \to \operatorname{argth} x$. On a $D_f =]-1,1[$, f est C^1 (même C^∞) sur D_f avec pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ (voir rappel ci-dessous) .
D'après 1., on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x^2| < 1 \text{ i.e. } \forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1 = r, \quad f'(x) = \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \tag{3.10}$$

et le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} x^{2n}$ est $R = 1$ ($R \geq r = 1$ et pour $x = 1$ la série diverge grossièrement donc $R \leq 1$).
D'après (3.10) et Corollaire 4, on a alors pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

ce qui donne pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\operatorname{argth} x - \operatorname{argth} 0 = \operatorname{argth} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Comme $\sum_{n \geq 0} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est la série entière primitive de $\sum_{n \geq 0} x^{2n}$, elle a alors le même rayon de convergence $R = 1$.
Rappel : La fonction $\operatorname{th} := \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}} : \mathbb{R} \to]-1,1[$ est continue (même C^∞) et strictement croissante ($\forall x \in \mathbb{R}, (\operatorname{th})'(x) = \dfrac{1}{1-\operatorname{th}^2 x} > 0$ car $\operatorname{th} x \in [0,1[$). Par suite, d'après le Théorème de la bijection, th est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\operatorname{Im}(\operatorname{th})$ qui n'est autre, d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, que $] \lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x, \lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x[=]-1,1[$.
On appelle $\operatorname{argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque. On a argth est de classe C^1 (même C^∞) sur $]-1,1[$ avec

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (\operatorname{argth})'(x) = \frac{1}{(\operatorname{th}'(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1}{1-x^2}.$$

□

Développements en série entière obtenus à l'aide d'une équation différentielle

Théorème 15

Les fonctions suivantes sont développables en série entière, on note R le rayon de convergence de la série obtenue.

$$\forall x \in \mathbb{R};\ |x| < 1, \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \qquad \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \qquad R = 1$$

$$\text{si } \alpha = p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad (1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{p} \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} x^n, \qquad R = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R};\ |x| < 1, \qquad \arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad R = 1$$

Démonstration. Pour $x \mapsto (1+x)^\alpha$, nous verrons la preuve en TD à l'aide d'une équation différentielle.

On peut aussi montrer ce développement avec la formule de Taylor avec reste intégral.

Pour $f : x \mapsto \arcsin x$, on a f est C^1 sur $]-1,1[$ avec pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

On utilise le développement de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $u = -x^2$, on simplifie puis on intègre pour obtenir le résultat (voir aussi TD). □

Nous verrons aussi en TD que les séries entières peuvent aider dans la résolution d'équations différentielles.

Remarque 9

Soit $X \subset \mathbb{C}$ un voisinage de 0 (resp. $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant 0). On a vu que $f : X \to \mathbb{C}$ (resp. $f : I \to \mathbb{C}$) est développable en série entière en 0 s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in D(0,r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ (resp. pour tout $x \in]-r,r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$) avec $0 < r \leq R$, où R est le rayon de convergence de la série entière associée.
Dans tous les exemples vu avant $R = r$, mais il se peut que $R > r$.

Voici un exemple :

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$ si $|x| < 1$, $f(x) = e$ si $x \geq 1$ et $f(x) = e^{-1}$ si $x \leq -1$. La fonction f est définie, continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in]-1,1[=]-r,r[$,

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x)$$

et le rayon de convergence de la série entière associée $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est $R = +\infty > r = 1$.
La fonction f n'est pas égale à S sur tout $\mathbb{R}$ même si les deux sont définies sur tout $\mathbb{R}$ (on a pour tout $x > 1$, $f(x) = e \neq S(x) = e^x$ et pour tout $x < -1$, $f(x) = e^{-1} \neq S(x) = e^x$).

On peut même trouver une fonction C^∞ qui est développable en série entière en 0 sur $]-r,r[$ avec le rayon de convergence de la série entière obtenue $R = +\infty > r$. Prendre par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = 0$ pour $x \in]-\infty, 1]$, $f(x) = e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$ pour $x > 1$.

Le développement en série entière d'une fonction en un point peut servir à montrer que la fonction est C^∞ au voisinage de ce point ou admet un prolongement C^∞ en ce point :

Exercice 3

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et par $f(0) = 1$.
Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'Exercice 3 : Notons que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ (ouvert) car $\exp$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $x \to \dfrac{1}{x}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
Reste à montrer que f est C^∞ au voisinage de 0. Pour cela, on va montrer que f est développable en série entière en 0.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n := S(x)$$

où S est la fonction somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)!} x^n = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R = +\infty$.
D'autre part, $S(0) = a_0 = 1 = f(0)$.
Par suite, $f = S$ sur $\mathbb{R}$ et donc f est DSE en 0 (si on n'a pas calculé R, on voit ici que

$R = +\infty$.) .
Comme S est C^∞ sur $]-R, R[=]-\infty, +\infty[$ (Théorème 8), on déduit alors que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
De plus, comme $f = S$ sur $\mathbb{R}$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = S^{(n)}$ sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = S^{(n)}(0) = n!\, a_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Un autre exemple :

Exercice 4

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$ si $x \neq 0$ et par $f(0) = 1$.

a. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)^2}$.

Correction de l'Exercice 4 :

a. Notons que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ (ouvert) car $\arctan$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $x \to \dfrac{1}{x}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
Reste à montrer que f est C^∞ au voisinage de 0. Pour cela, on va montrer que f est développable en série entière en 0.
On a pour tout $x \in]-1, 1[$, $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
Donc pour tout $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$,

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k := S(x)$$

où S est la fonction somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ de rayon de convergence R avec

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} & \text{si } k = 2n,\ n \in \mathbb{N} \\ 0 \quad \text{si} & k = 2n+1, n \in \mathbb{N} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k+1} & \text{si } k \ \text{ est pair} \\ 0 \quad \text{si} & k \ \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a de plus, $S(0) = a_0 = 1 = f(0)$.
Par suite, $f = S$ sur $]-1, 1[=]-r, r[$, donc f est DSE en 0 et on a $R \geq r = 1$ (ici $R = r = 1$).

Comme S est C^∞ sur $]-R,R[$ (Théorème 8) et que $f=S$ sur $]-1,1[=]-r,r[\subset]-R,R[$, on déduit alors que f est C^∞ au voisinage de 0 et donc C^∞ sur $\mathbb{R}$ car f est déjà C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

b. Comme $f=S$ sur $]-1,1[$, on a alors pour tout $k\in\mathbb{N}$, $f^{(k)}=S^{(k)}$ sur $]-1,1[$ et donc en particulier pour tout $k\in\mathbb{N}$

$$f^{(k)}(0)=S^{(k)}(0)=k!\,a_k=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}}k!}{k+1} & \text{si } k \text{ est pair}\\ 0 \quad \text{si} \quad k \text{ est impair.}\end{cases}$$

c. Comme $f=S$ sur $[0,\frac{1}{2}]\subset]-1,1[\subset]-R,R[$ (ici $]-1,1[=]-R,R[$), on peut alors, d'après Théorème 7 , intervertir intégrale et somme et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} S(x)dx\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}dx\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\frac{1}{2^{2n+1}}.\end{aligned}$$

Développement en séries entières des fonctions usuelles :
Famille de l'exponentielle : Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{ch}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Toutes ces séries entières ont un rayon de convergence $R = +\infty$.

Famille du binôme : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| < 1$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\operatorname{argth}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad R = 1$$

Toutes ces séries entières ont un rayon de convergence $R = 1$.

Et pour $\alpha = p \in \mathbb{N}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{p} \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{p} \frac{p!}{n!(p-n)!} x^n = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} x^n$$

avec le rayon de convergence de cette série $R = +\infty$.