Chapitre 1

Suites de fonctions

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On s'intéresse à la convergence des suites de fonctions $(f_n)_n$ où les fonctions f_n sont définies sur un même domaine non vide D de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Le module sur $\mathbb{C}$ est noté $|\,.\,|$, $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

1.1 Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions

Définition 1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $D \to \mathbb{K}$ et $f : D \to \mathbb{K}$.

1. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement (CVS) vers f sur $A \subset D$ si pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ càd

$$\forall x \in A, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

   Autrement dit, $(f_n)_n$ CVS vers f sur A si

$$\forall x \in A,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

   où n_0 dépend de ϵ et de x.

2. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément (CVU) vers f sur A si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq n_0, \forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

   où n_0 ne dépend que de ϵ. Cette propriété est équivalente à :

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

(ce qui suppose que $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang).

Notons que si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, alors $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur A. Attention ! Réciproque fausse !

Exemple :

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$. On a

i) $(f_n)_n$ CVS sur $[0,1]$ vers

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

ii) $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$. En effet, s'il y avait CVU, ce serait vers f ; or, pour tout n, $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \neq 0$.

iii) Il ne suffit pas d'écarter 1 : pas de CVU sur $[0,1[$ puisque pour tout n, $\sup\limits_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)| = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \neq 0$.

iv) Pour $a \in]0,1[$, $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,a]$. En effet, pour tout n,

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = a^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Proposition 1

(Critère de Cauchy uniforme) Une suite de fonctions $(f_n)_n$ de D vers $\mathbb{K}$ converge uniformément sur $A \subset D$ si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme suivant sur A

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}; \forall p,\, q \geq N,\ \forall x \in A,\ |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon.$$

Démonstration. Supposons que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $A \subset D$ vers une fonction $f : A \to \mathbb{K}$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in A$, on a $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

On a alors pour tout $p,\, q \geq n_0$ et pour tout $x \in A$, on a $|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| < \epsilon$.

D'où $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A.

Réciproquement, supposons $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A. Montrons alors que $(f_n)_n$ converge uniformément sur A.
On va commencer par montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur A. Soit $a \in A$.
Soit $\epsilon > 0$. Comme $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A,

$$\exists N \in \mathbb{N};\ \forall p, q \geq N,\ \forall x \in A,\ |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon. \tag{1.1}$$

En particulier, on a pour tout $p,\ q \geq N$, $|f_p(a) - f_q(a)| < \epsilon$. Par suite, $(f_n(a))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ donc converge vers $l_a \in \mathbb{K}$.
On a donc montré que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur A vers la fonction $f : A \to \mathbb{K}$ qui à $x \in A$ associe l_x.

Montrons maintenant que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A.
Soit $\epsilon > 0$. En passant à la limite quand $q \to +\infty$ dans (1.1) (comme $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A), on obtient

$$\exists N \in \mathbb{N};\ \forall p \geq N,\ \forall x \in A,\ \lim_{q \to +\infty} |f_p(x) - f_q(x)| = |f_p(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

D'où $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A. □

Méthodes pratiques :
Plan d'étude standard pour étudier la convergence d'une suite de fonctions $(f_n)_n$ sur A :

1. CVS : fixer x dans A et étudier la suite numérique $(f_n(x))_n$, ce qui fournit f le cas échéant (si nécessaire, distinguer différents cas selon la valeur de x) ;
2. CVU : Supposons que $(f_n)_n$ CVS vers f sur A.
   a. Pour montrer la CVU de $(f_n)_n$ vers f sur A, il suffit de chercher pour tout n, un majorant α_n (indépendant de x) de $\{|f_n(x) - f(x)|;\ x \in A\}$ tel que la suite numérique $(\alpha_n)_n$ converge vers 0. On a alors la CVU puisque $\sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$.

   b. Pour nier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur A, il suffit de trouver une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A telle que la suite numérique $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ ne converge pas vers 0. En effet, si $(f_n)_n$ CVU vers f sur A, alors pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A, on a

   $$\forall n, \quad 0 \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_A |f_n - f|$$

   et donc $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ converge vers 0 par encadrement.

   c. Pour montrer ou pour nier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur A, on peut éventuellement déterminer la valeur exacte de $\sup\limits_A |f_n - f|$.

   d. En l'absence de convergence uniforme sur A , on peut parfois établir la convergence uniforme sur certaines parties de A (en restreignant le domaine).

1.2 Régularité des limites des suites de fonctions

La convergence simple d'une suite de fonctions $(f_n)_n$ ne permet pas de préserver la régularité des f_n (continuité, dérivabilité, intégrabilité...) au passage à la limite ni d'intervertir deux limites, ni limite-intégrale, ni limite-dérivée.
La question est donc : sous quelles conditions supplémentaires nous pourrons obtenir ces résultats ? Nous verrons dans cette partie que la convergence uniforme nous permettra de conserver ces propriétés.

1.2.1 Interversion des limites

On ne peut pas toujours intervertir les limites ! On revient à l'exemple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui à x associe x^n. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 0$ pour $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$.
On a $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\lim\limits_{n\to+\infty} x^n \right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\lim\limits_{x\to 1^-} x^n \right) = 1$.

Définition 2
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (respectivement de $\mathbb{C}$). Un point $a \in \mathbb{R}$ (respectivement $a \in \mathbb{C}$) est dit adhérent à A si tout intervalle ouvert centré en a (respectivement toute boule ouverte (disque ouvert) centrée en a) contient au moins un élément de A.

Remarquons qu'un point $a \in A$ est adhérent à A.

Théorème 1
(Théorème de la double limite) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A vers $\mathbb{K}$. Soit a un point adhérent à A ou $a = +\infty$ si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré ou $a = -\infty$ si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas minoré. On suppose que

i) pour tout n, f_n admet en a une limite finie $l_n \in \mathbb{K}$,

ii) la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A.

Alors la suite numérique $(l_n)_n$ converge dans $\mathbb{K}$ vers une limite l et f admet l pour limite en a. Autrement dit, on peut intervertir les limites et on a

$$\lim_{x\to a} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to a} f_n(x) \right).$$

Démonstration. Nous allons commencer par montrer la convergence de la suite $(l_n)_n$. Pour cela, nous allons montrer que c'est une suite de Cauchy.
Soit $\epsilon > 0$. Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, elle vérifie alors le critère de

Cauchy uniforme sur A : il existe donc un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p, q \geq n_0$, on a pour tout $x \in A$,

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon.$$

En faisant tendre $x \to a$, on obtient $|l_p - l_q| \leq \epsilon$. On a donc montré que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq n_0,\ |l_p - l_q| \leq \epsilon.$$

Autrement dit, $(l_n)_n$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{K}$ et donc convergente. Notons l sa limite.
Il reste à montrer que $f(x) \to l$ quand $x \to a$.
Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f(x) - l| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - l_n + l_n - l| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|. \tag{1.2}$$

Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1,\ \forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{1.3}$$

D'autre part , $l_n \underset{n \to +\infty}{\to} l$, donc il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_2,\ |l_n - l| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.4}$$

On prend $n = \max(n_1, n_2)$. Comme $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = l_n$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in A,\ |x - a| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - l_n| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.5}$$

En utilisant (1.3) , (1.4) et (1.5) dans (1.2), on déduit que $\forall x \in A$ tel que $|x - a| < \eta$, on a $|f(x) - l| < \epsilon$. On a donc montré que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

D'où $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$. □

1.2.2 Convergence uniforme et continuité

Le théorème suivant découle du Théorème 1.

Théorème 2
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$, **toutes continues sur** A. Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, alors f est continue sur A.

Remarque 1
En reprenant l'exemple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui à x associe x^n, on voit que sans la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ on peut perdre la continuité de la fonction limite f.

1.2.3 Intégration,dérivation

Dans cette partie, nous allons étudier l'intégration, dérivation des limites des suites de fonctions, mais cela ne concerne que les fonctions de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $(a_i)_{i=0,\dots,p}$ de $[a,b]$ telle que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_i < \dots < a_p = b$ avec pour tout $i = 0, \dots, p-1$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ admet un prolongement continu sur $[a_i, a_{i+1}]$.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux si elle l'est sur tout segment de I.

Convergence uniforme et intégration

Théorème 3
(Interversion de limite-intégrale sur un segment) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (respectivement continue par morceaux) sur $[a,b]$.
Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$ (respectivement vers une fonction f sur $[a,b]$ **continue par morceaux**), alors la suite numérique $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_n$ converge et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$

$$\forall x \in [a,b], \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

En intégrant les deux membres de cette inégalité sur $[a, b]$, on obtient

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \frac{\epsilon}{b-a} \int_a^b dx = \epsilon.$$

Et on a alors

$$\left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \epsilon$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx = 0$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Exercice 1

Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{rcccc} f_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & xe^{\frac{x}{n}} \end{array}$$

1. Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f à déterminer.
2. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ où $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ (sans calculer les I_n).

Remarque 2

La convergence simple n'est pas suffisante pour intervertir limite et intégrale.

Exercice 2

Pour tout $n \geq 2$, soit

$$\begin{array}{rcccc} f_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} n^2 x \ \text{ si } \ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n \ \text{ si } \ \dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{2}{n} \\ 0 \ \text{ si } \ \dfrac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 2}$ converge simplement vers $f = 0$ sur $[0, 1]$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx$.

3. Que peut-on déduire pour la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq 2}$ vers f sur $[0,1]$?

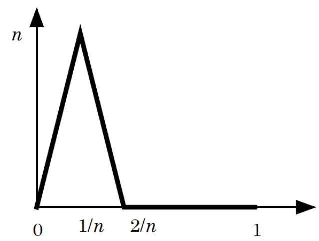

FIGURE 1.1 – graphe f_n, exercice 2

Intégration : Théorème de convergence dominée (admis)

Théorème 4

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I,

ii) la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux,

iii) il existe une fonction $g : I \to [0, +\infty[$ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq g.$$

Alors les fonctions f_n et f sont (absolument) intégrables sur I et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx.$$

On a même $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I |f_n(x) - f(x)|dx = 0$

Exercice 3

On considère pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{array}{rccc} f_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} -nx+1 \text{ si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 \text{ si } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]0,1] \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

   mais pas uniformément.
2. Calculer pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. *Indication :* tracer le graphe de f_n.
3. En déduire que $\displaystyle\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx = 0 = \int_0^1 f(x)dx$.
4. Retrouver le résultat de 3) en utilisant le théorème de convergence dominée.

Exercice 4

(Intégrale de Wallis). Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$.

Exercice 5

Reprenons la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie dans l'Exercice 2. Nous avons montré que $\displaystyle\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_n f_n(x)dx$.
Quelle est l'hypothèse du Théorème de convergence dominée qui fait défaut ?

Convergence uniforme et Dérivation

Théorème 5

(Suite de fonctions de classe C^1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I,

ii) il existe $a \in I$ tel que la suite numérique $(f_n(a))_n$ converge,

iii) la suite de fonctions $(f_n')_n$ converge uniformément vers g sur I (ou sur tout segment de I).

Alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f de classe C^1 sur I et on a

$$f' = g \text{ sur } I \text{ i.e. } \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'.$$

Démonstration. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Supposons que $a < x$ (on fait pareil si $x > a$) et notons $f(a) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a)$. Le Théorème 3 appliqué à $(f_n')_n$ sur $[a,x]$ (hypothèses vérifiées) , nous donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \int_a^x g(t)dt.$$

D'autre part, comme

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \lim_{n\to+\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) - f(a),$$

on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ pour tout $x \in I$ ($x = a$ inclus).
Par suite $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers la fonction f définie par $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ pour tout $x \in I$.
Comme g est continue sur I (car comme les f_n' sont continues sur I et la suite de fonctions $(f_n')_n$ CVU vers g sur tout segment de I, alors d'après Théorème 2, g est continue sur tout segment de I et donc sur I), alors d'après le Théorème fondamental de l'Analyse, $G : x \mapsto f(x) - f(a)$ est dérivable sur I et on a

$$\forall x \in I, \quad G'(x) = f'(x) = g(x).$$

Comme $f' = g$ et g est continue sur I, on déduit que f est C^1 sur I.
Reste à montrer que $(f_n)_n$ CVU vers f sur tout segment de I. Soit $[\alpha,\beta]$ un segment de I. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [\alpha,\beta]$,

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_n(\alpha) + f_n(\alpha) - f(\alpha) - (f(x) - f(\alpha))| \\
&= \left| f_n(\alpha) - f(\alpha) + \int_\alpha^x (f_n'(t) - g(t))dt \right| \\
&\le |f_n(\alpha) - f(\alpha)| + \left| \int_\alpha^x f_n'(t) - g(t)dt \right| \\
&\le |f_n(\alpha) - f(\alpha)| + (\beta - \alpha) \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f_n'(t) - g(t)|.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f_n(x) - f(x)| \le |f_n(\alpha) - f(\alpha)| + (\beta - \alpha) \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |f_n'(t) - g(t)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

car $(f_n')_n$ CVU vers g sur $[\alpha,\beta]$ segment et $\lim\limits_n f_n(\alpha) = f(\alpha)$.

Par suite, $\sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ CVU vers f sur $[\alpha,\beta]$, pour tout $[\alpha,\beta]$ segment de I. $\square$

Il en résulte le Théorème suivant :

Théorème 6

(Suite de fonctions de classe C^1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I,

ii) la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I,

iii) la suite de fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément vers g sur I (ou sur tout segment de I).

Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe C^1 sur I et on a

$$f' = g \text{ sur } I \text{ i.e. } \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} f'_n.$$

En réitérant le Théorème 6 pour calculer les dérivées d'ordre supérieur, on obtient le théorème suivant :

Théorème 7

(Suite de fonctions de classe C^p) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^p sur I,

ii) pour tout $k = 0, 1, ...p-1$, la suite de fonctions $(f_n^{(k)})_n$ converge simplement vers g_k sur I,

iii) la suite de fonctions $(f_n^{(p)})_n$ converge uniformément vers g_p sur I (ou sur tout segment de I).

Alors la limite simple $f := g_0$ de $(f_n)_n$ sur I est de classe C^p et on a pour tout $k = 0, 1, ...p$,

$$f^{(k)} = \lim_n f_n^{(k)} = g_k \quad \text{sur } I.$$