CC2 - le 6 avril 2023 - 1h30

Séries entières

Exercice 1. Cet exercice est une suite de questions indépendantes.

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^{n/2} z^n$ et donner une expression explicite de la somme en fonction de $z \in \mathbb{C}$.

2. Donner un exemple de série entière dont le rayon de convergence est égal à e (justifier la valeur du rayon de convergence).

3. Soit (a_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \neq 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, pour $z \in \mathbb{C}$?

4. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $x \to \ln(1 + x^4)$, pour $x \in \mathbb{R}$. Quel est le plus grand voisinage de 0 dans lequel ce développement est valable?

5. En utilisant des développements en séries entières, montrer l'inégalité $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x) \leq e^{x^2/2}$.

Exercice 2. Soit la série entière $\displaystyle f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner le rayon de convergence R de la série entière qui définit f.

2. Prouver qu'il y a convergence de la série entière qui définit f pour tout x dans l'intervalle fermé $[-R, R]$.

3. Montrer que f est continue dans $]-R, R[$, puis dans $[-R, R]$.

4. Donner une expression explicite (sans signe somme) de f' dans $]-R, R[$, en comparant avec le développement en série entière de $y \to \ln(1 + y)$.

5. En déduire une expression explicite (sans signe somme) de f dans $[-R, R]$.

Exercice 3. Soit l'équation différentielle $f''(x) - xf(x) = 0$, d'inconnue une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞. On suppose qu'il existe une solution qui est une série entière: $\displaystyle f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. En utilisant l'équation différentielle satisfaite par f, trouver une relation de récurrence satisfaite par la suite (a_n).

2. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.