
CC2 - Correction

SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 1. Cet exercice est une suite de questions indépendantes.

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^{n/2} z^n$ et donner une expression explicite de la somme en fonction de $z \in \mathbb{C}$.

On applique le critère de d'Alembert: avec $a_n = 2^{n/2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{(n+1)/2}}{2^{n/2}} = 2^{1/2},$$

si bien que le rayon de convergence est $2^{-1/2}$. La somme de la série entière est

$$\sum_{n\geq 0} 2^{n/2} z^n = \sum_{n\geq 0} (2^{1/2} z)^n,$$

et on peut utiliser la somme connue $\sum_{n\geq 0} x^n = 1/(1-x)$, pour $|x| < 1$, pour conclure:

$$\sum_{n\geq 0} 2^{n/2} z^n = \frac{1}{1 - 2^{1/2} z}, \qquad \forall\, z \in \{x \in \mathbb{C},\ |x| < 2^{-1/2}\}.$$

---

2. Donner un exemple de série entière dont le rayon de convergence est égal à e (justifier la valeur du rayon de convergence).

On peut par exemple s'inspirer de l'exemple précédent, en remplaçant $2^{1/2}$ par $1/e$: la série entière $\sum_{n\geq 0}(z/e)^n$ a un rayon de convergence égal à e, ce qu'on vérifie directement par le critère de d'Alembert.

---

3. Soit (a_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \neq 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, pour $z \in \mathbb{C}$?

Ici on ne peut pas utiliser les critères de Cauchy ou d'Alembert, car on n'a pas assez d'informations sur la suite des coefficients (a_n). Donc on revient à la définition du rayon de convergence: pour quels $r > 0$ la suite $(a_n r^n)$ est-elle bornée? Si $r > 1$, alors $(a_n r^n)$ n'est pas bornée. En effet, comme $\ell \neq 0$, alors pour n assez grand, $|a_n| \geq |\ell|/2$, et donc $|a_n r^n| \geq r^n |\ell|/2$, et la suite minorante $(r^n|\ell|/2)$ tend vers $+\infty$, car $r > 1$. Par ailleurs, si $r < 1$, alors la suite (r^n) est bornée, la suite (a_n) est convergente donc bornée, donc la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Finalement, pour $r > 1$, la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée, et pour $r < 1$ la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Donc le rayon de convergence est égal à 1.

---

4. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $x \to \ln(1 + x^4)$, pour $x \in \mathbb{R}$. Quel est le plus grand voisinage de 0 dans lequel ce développement est valable?

On peut commencer par le développement en série entière de $x \to \ln(1 + y)$:

$$\ln(1+y) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n y^{n+1}}{n+1}, \qquad |y| < 1. \tag{1}$$

Il suffit ensuite de poser $y = x^4$. Donc on a le développement

$$\ln(1+x^4) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{4(n+1)}}{n+1}, \tag{2}$$

dés que $|x| < 1$, car alors $|y| = |x^4| < 1$. Par ailleurs, le rayon de la série entière dans (1) est égal à 1, et $(|x| < 1) \iff (|x^4| < 1)$, donc le rayon de convergence de la série entière dans (2) est aussi 1, et $B(0, 1)$ est donc le plus grand voisinage de 0 dans lequel le développement (2) est valable.

---

5. En utilisant des développements en séries entières, montrer l'inégalité $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x) \leq e^{x^2/2}$.

Le développement en série entière de ch est la partie paire du développement en série entière de l'exponentielle:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad ch(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Par ailleurs,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^{x^2/2} = \sum_{n \geq 0} \frac{(x^2/2)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2^n n!}.$$

Soit $n \in N^*$. Alors

$$2^n \cdot n! \leq (2n)!. \tag{3}$$

En effet,

$$(2n)! = n! \cdot (n+1) \ldots (2n),$$

donc il s'agit de prouver

$$2^n \leq (n+1)\dots(2n), \quad \forall\, n \in N^*. \tag{4}$$

Le produit dans le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est un produit de $2n - (n+1) + 1 = n$ termes. Chacun des termes est plus grand que 2, car $n + 1 \geq 2$. Cela prouve (4), qui implique (3). Á partir de (3), par multiplication par $x^{2n} \geq 0$, on obtient:

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{x^{2n}}{2^n n!}.$$

Donc par sommation en n (on peut sommer en n car les séries entières convergent dans $\mathbb{R}$ tout entier), on obtient l'inégalité demandée.

Exercice 2. Soit la série entière $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner le rayon de convergence R de la série entière qui définit f.

On peut commencer par travailler avec la série entière $g(y) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} y^n$. Avec le critère de d'Alembert, on vérifie facilement que son rayon de convergence est égal à 1. En effet, les coefficient sont $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$, si bien que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)(2(n+1)+1)}{n(2n+1)} \sim \frac{2n^2}{2n^2} = 1.$$

Le lien entre f et g est donné par $f(x) = xg(x^2)$. Comme $|x| < 1 \iff |x|^2 < 1$, le rayon de la série entière f est aussi égal à 1.

En effet, voici un argument qui vérifie cela précisément: on note (α_n) la suite des coefficients de f, de sorte que

$$\alpha_n = \begin{cases} a_{(n-1)/2}, & \text{si } n \text{ impair,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$. La suite $(\alpha_n x^n)$ est-elle bornée? La sous-suite des termes d'indice pair est nulle donc bornée. La sous-suite des termes d'indice impair est $(a_n x^{2n+1})$. Comme $|x| < 1$, on a $|x^2| < 1$ et donc la suite $(a_n(x^2)^n)$ est bornée. Finalement, la suite $(\alpha_n x^n)$ est bornée.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| > 1$. Alors $|x^2| > 1$, donc la suite $(a_n x^{2n})$ n'est pas bornée. Donc la suite $(a_n x^{2n+1})$ n'est pas bornée. C'est la suite des termes d'indice impair de la suite $(\alpha_n x^n)$, qui n'est donc pas bornée.

On vient de prouver que le rayon de convergence de la série entière qui définit f est égal à 1. Donc avec la notation de l'énoncé, $R = 1$.

---

2. Prouver qu'il y a convergence de la série entière qui définit f pour tout x dans l'intervalle fermé $[-R, R]$.

On sait déjà qu'il y a convergence dans $]-1,1[$ par propriété des séries entières dans leur disque ouvert de convergence.

Il s'agit donc de prouver qu'il y a convergence en $x=-1$ et en $x=1$.

On observe que
$$|a_n| = \frac{1}{2n^2}$$
qui est une série de Riemann convergente. D'où la convergence de la série entère qui définit f pour x tel que $|x|=1$.

---

3. Montrer que f est continue dans $]-R,R[$, puis dans $[-R,R]$.

Par propriété des séries entières dans leur disque ouvert de convergence, f est continue dans $]-1,1[$.

Pour montrer la continuité dans $[-1,1]$, il suffit de prouver la convergence normale de la série dans $[-1,1]$, car pour tout n, la fonction $x \to a_n x^{2n+1}$ en notant $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$, comme à la question précédente.

On observe que
$$\sup_{-1\leq x\leq 1} |a_n x^{2n+1}| = |a_n|,$$
et la série de terme général $(|a_n|)$ est une série de Riemann convergente. D'où la convergence normale dans $[-1,1]$.

---

4. Donner une expression explicite (sans signe somme) de f' dans $]-R,R[$, en comparant avec le développement en série entière de $y \to \ln(1+y)$.

Par propriété des séries entières dans leur disque ouvert de convergence, on obtient l'expression de f' sous forme de série entière en dérivant terme à terme la série entière qui définit f.

Donc, pour $x \in]-1,1[$,
$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n}.$$
En faisant un décalage d'indice dans la somme, et en utilisant le fait que $(-1)^{n+2} = (-1)^n$, on a
$$f'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} (x^2)^{n+1} = \ln(1+x^2),$$
en comparant avec (1).

5. En déduire une expression explicite (sans signe somme) de f dans $[-R, R]$.

On observe que $f(0) = 0$, et donc

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt,$$

qu'on va calculer en intégrant par parties:

$$\begin{aligned} f(x) &= [t\ln(1+t^2)]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}dt \\ &= x\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{2(1+t^2)-2}{1+t^2}dt. \end{aligned}$$

On reconnait la dérivée de arctan, si bien que

$$f(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x).$$

Exercice 3. Soit l'équation différentielle $f''(x) - xf(x) = 0$, d'inconnue une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞. On suppose qu'il existe une solution qui est une série entière: $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. En utilisant l'équation différentielle satisfaite par f, trouver une relation de récurrence satisfaite par la suite (a_n).

Par propriété des séries entières dans leur disque ouvert de convergence, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1},$$

et

$$f''(x) = \sum_{n\geq 1} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

Donc en utilisant l'équation différentielle, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$\sum_{n\geq 1} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0,$$

c'est-à-dire, en faisant un changement d'indice dans la première somme:

$$\sum_{n\geq -1} (n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} = 0.$$

Donc

$$2a_2 + \sum_{n\geq 0} \big((n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n\big)x^{n+1} = 0.$$

Donc par le principe des zéros isolés $a_2 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+3)(n+2)a_{n+3} - a_n = 0.$$

C'est la relation de récurrence cherchée, qui nous donne a_3 en fonction de a_0, puis a_4 en fonction de a_1, et a_5 en fonction de a_2, etc. Comme $a_2 = 0$, on obtient une famille de solutions à deux paramétres: a_0 et a_1, ce qui est cohérent avec le fait que l'équation différentielle est d'ordre deux.

---

2. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

D'après la question précédente, la suite (a_n) est determinée par la donnée de a_0 et a_1, puis par $a_2 = 0$ et

$$a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)}, \qquad n \geq 0.$$

On a donc

$$a_{3n} = \frac{a_{3(n-1)}}{3n(3n-1)} = \frac{a_{3(n-2)}}{3n(3n-1)\cdot 3(n-1)(3(n-1)-1)}$$

pour tout $n \geq 2$, si bien que par récurrence

$$a_{3n} = \frac{a_0}{\prod_{1\leq j\leq n} 3j(3j-1)}, \qquad \forall n \geq 1. \tag{5}$$

De même,

$$a_{3n+1} = \frac{a_{3n-2}}{(3n+1)(3n)} = \frac{a_{3(n-1)-2}}{(3n+1)(3n)\cdot(3(n-1)+1)(3(n-1))}$$

pour tout $n \geq 2$, si bien que par récurrence

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{\prod_{1\leq j\leq n} 3j(3j+1)}, \qquad \forall n \geq 1. \tag{6}$$

Par ailleurs,

$$a_{3n+2} = 0, \qquad \forall n \geq 0. \tag{7}$$

Les équations (5)-(6)-(7) déterminent entièrement la suite (a_n) en fonction de a_0 et a_1. De (5)-(6)-(7) on déduit la majoration

$$|a_n| \leq \frac{\max(|a_0|, |a_1|)}{[n/3]!}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$|a_n x^n| \leq \frac{\max(|a_0|, |a_1|)}{[n/3]!}|x|^n,$$

et donc par la formule de Stirling

$$|a_n x^n| \to 0$$

si bien que le rayon de convergence est infini.