CC1 - le 2 mars 2023 - 1h30

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 1. Soit la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{|x| + n + 1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) dans $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) dans $[a, b]$.

Exercice 2. Soit la suite de fonctions $g_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \dfrac{nx}{n|x| + 1}$, pour tout $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence uniforme de (g_n) dans $[-1, 1]$.

Exercice 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(x^2 \sqrt{n})}{n^2}$. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$, est continue et dérivable et donner une expression de F'.

Exercice 4. Soit $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la suite de fonctions définie par $u_n(x) = \dfrac{e^{-n^2 x^2}}{1 + n^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge simplement dans $\mathbb{R}$.
   On note U la somme de la série, si bien que $U(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{e^{-n^2 x^2}}{1 + n^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note (comme d'habitude) u_n' la dérivée de la fonction $x \to u_n(x)$. Montrer que la série de terme géneral u_n' ne converge pas normalement dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la série de terme géneral u_n' converge uniformément dans $[a, +\infty[$.
4. En déduire une expression pour $U'(x)$, pour tout $x \neq 0$.
5. Étudier la limite $\displaystyle\lim_{x \to 0} U'(x)$.