Vrai ou Faux ? A propos du CM du 22/03

Analyse 4
29/03/2024

Vrai/Faux 1 - Formule pour calculer une dérivée croisée

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(1,0) \in \Omega$ ouvert, alors pour savoir si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0)$ existe, il faut étudier la limite du quotient suivant, défini pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(1+h,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)}{h}, \quad \text{quand } h \to 0.$$

Vrai/Faux 1 - Formule pour calculer une dérivée croisée

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(1,0) \in \Omega$ ouvert, alors pour savoir si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0)$ existe, il faut étudier la limite du quotient suivant, défini pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(1+h,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)}{h}, \quad \text{quand } h \to 0.$$

VRAI. On souhaite calculer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(1,0),$$

il faut donc étudier le taux de variation de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ au point $(1,0)$ quand on fait varier uniquement la première coordonnée (celle de x).

Vrai/Faux 2 - Limite et différentiabilité seconde

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2, 3+h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,3)}{h} = +\infty,$$

alors f n'est pas deux fois différentiable au point $(-2, 3)$.

Vrai/Faux 2 - Limite et différentiabilité seconde

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2, 3+h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,3)}{h} = +\infty,$$

alors f n'est pas deux fois différentiable au point $(-2, 3)$.

VRAI. La limite du quotient ci-dessus est utilisée pour vérifier si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-2,3) \text{ existe},$$

ce qui n'est pas le cas ici (la limite est infinie), donc f ne peut PAS être deux fois différentiable au point $(-2, 3)$.

Vrai/Faux 3 - Fonction C^1 et différentiabilité seconde

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω ouvert. Si $f \in C^1(\Omega)$, alors f est deux fois différentiable sur Ω.

Vrai/Faux 3 - Fonction C^1 et différentiabilité seconde

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω ouvert. Si $f \in C^1(\Omega)$, alors f est deux fois différentiable sur Ω.

FAUX. La continuité des dérivées partielles premières n'assure PAS la différentiabilité seconde. On pourrait avoir, pour $n = 2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

et f ne serait pas deux fois différentiable en $(0,0)$ car cela contredirait le théorème de Schwarz.

Par contre, $f \in C^2(\Omega) \Rightarrow f$ deux fois différentiable.

Vrai/Faux 4 - Dérivées directionnelles

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω ouvert et $x_0 \in \Omega$.
Si f est deux fois différentiable, alors

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \text{ existe.}$$

Vrai/Faux 4 - Dérivées directionnelles

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω ouvert et $x_0 \in \Omega$.
Si f est deux fois différentiable, alors

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \text{ existe.}$$

VRAI. En effet, on a les implications suivantes :

f est deux fois différentiable en x_0

$\Rightarrow f$ est différentiable en x_0

$\Rightarrow f$ admet des dérivées directionnelles en x_0 selon tout vecteur