Vrai ou Faux ? A propos du CM du 19/01

Analyse 4
26/01/2024

Vrai/Faux 1

L'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$N(x_1, x_2) = |x_1 + x_2|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Vrai/Faux 1

L'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$N(x_1, x_2) = |x_1 + x_2|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

FAUX. N vérifie tous les axiomes d'une norme, sauf celui de séparation car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad N(x, -x) = |x - x| = 0.$$

Par exemple $N(1, -1) = 0$ alors que $(1, -1) \neq (0, 0)$.

Par contre, $N(x_1, x_2) = |x_1 + x_2| + |x_1 - x_2|$ *est une norme.*

Vrai/Faux 2

L'application $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$N(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^4}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Vrai/Faux 2

L'application $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$N(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^4}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

FAUX. N ne vérifie pas l'homogénéité :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad N(\lambda x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda^4 x_i^4} = \sqrt{\lambda^4}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^4} = \lambda^2 N(x).$$

Par contre, la norme 4 définie par $\|x\|_4 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)^{\frac{1}{4}}$ *est bien une norme.*

Vrai/Faux 3

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|3x + 4y| \leq 5\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vrai/Faux 3

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|3x + 4y| \leq 5\sqrt{x^2 + y^2}.$$

VRAI. Il s'agit simplement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $(3, 4)$ et (x, y). On a donc

$$|3x + 4y| \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)} \times \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25}\sqrt{x^2 + y^2} = 5\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vrai/Faux 4

Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1,$$

alors on a l'inclusion des boules suivantes dans $\mathbb{R}^2$:

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(0,1) \subset B_{\|\cdot\|_2}(0,1) \subset B_{\|\cdot\|_1}(0,1)$$

Vrai/Faux 4

Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1,$$

alors on a l'inclusion des boules suivantes dans $\mathbb{R}^2$:

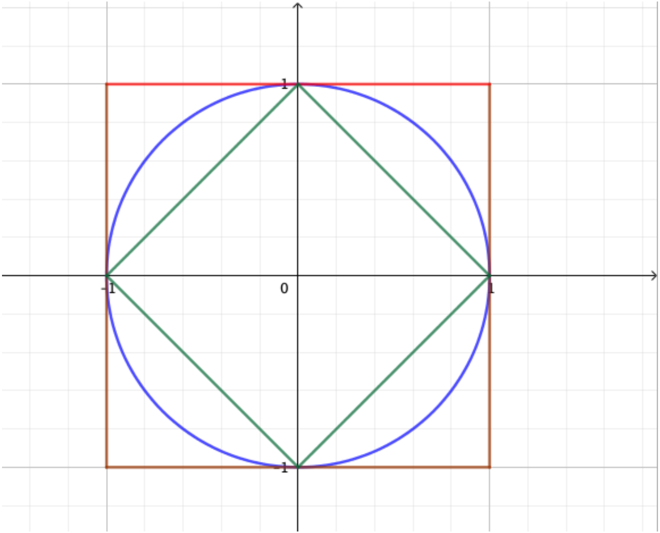
$$B_{\|\cdot\|_\infty}(0,1) \subset B_{\|\cdot\|_2}(0,1) \subset B_{\|\cdot\|_1}(0,1)$$

FAUX. L'inégalité est VRAIE car (arguments vus en TD)

$$\underbrace{\max(|x_1|,|x_2|)}_{\|x\|_\infty} = \max\left(\sqrt{x_1^2}, \sqrt{x_2^2}\right) \leq \underbrace{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}_{\|x\|_2} \leq \sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2} = \underbrace{|x_1| + |x_2|}_{\|x\|_1}$$

mais l'inclusion est dans l'autre sens (exercice facile) :

$$B_{\|\cdot\|_1}(0,1) \subset B_{\|\cdot\|_2}(0,1) \subset B_{\|\cdot\|_\infty}(0,1).$$



$$B_{\|\cdot\|_1}(0,1) \subset B_{\|\cdot\|_2}(0,1) \subset B_{\|\cdot\|_\infty}(0,1).$$