Vrai ou Faux ? A propos du CM du 16/02

Analyse 4
23/02/2024

Vrai/Faux 1 - Image d'un ensemble

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \|(x,y)\| + \cos(xy),$$

et $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^4 + y^4 = 1\right\}$, alors f admet un maximum sur A.

Vrai/Faux 1 - Image d'un ensemble

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \|(x,y)\| + \cos(xy),$$

et $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^4 + y^4 = 1\right\}$, alors f admet un maximum sur A.
VRAI. C'est une application du théorème de Weierstrass :

- f est **continue** comme somme de fonctions continues ;
- A est **compact** car :
  - A est borné. En effet, $\forall (x,y) \in A$,

    $$16x^4 \leq 16x^4 + y^4 = 1 \quad \text{et} \quad y^4 \leq 16x^4 + y^4 = 1$$

    et donc $x^4 \leq \frac{1}{16}$ et $y^4 \leq 1$, d'où $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $|y| \leq 1$.
  - A est fermé. En effet, soit $(x_k, y_k)_k \subset A$ qui converge vers (x,y), alors on a $\forall k \in \mathbb{N}, \quad 16x_k^4 + y_k^4 = 1$, et, par continuité de $(x,y) \mapsto 16x^4 + y^4$ et passage à la limite, on obtient $16x^4 + y^4 = 1$ et donc $(x,y) \in A$.

Ainsi, f continue atteint son maximum sur le compact A.

Vrai/Faux 2 - Définition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $h = (h_1, h_2)$, quand $h \to 0$,

$$f(1 + h_1, 2 + h_2) = 4h_2 - 6h_1 - 8 + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right),$$

alors f est différentiable au point $(1, 2)$.

Vrai/Faux 2 - Définition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $h = (h_1, h_2)$, quand $h \to 0$,

$$f(1 + h_1, 2 + h_2) = 4h_2 - 6h_1 - 8 + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right),$$

alors f est différentiable au point $(1, 2)$.

VRAI. En effet, soit $x_0 = (1, 2)$ et $h = (h_1, h_2)$, on a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + D_{x_0} f(h) + o(\|h\|_2)$$

avec

- $f(x_0) = f(1, 2) = -8$,
- $(h_1, h_2) \mapsto -6h_1 + 4h_2$ est linéaire,
- $o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right) = o(\|h\|_2)$,

donc f est différentiable de différentielle

$$D_{x_0} f : (h_1, h_2) \mapsto -6h_1 + 4h_2.$$

Vrai/Faux 3 - Valeur d'une différentielle à l'origine

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $D_{x_0} f(0) \neq 0$.

Vrai/Faux 3 - Valeur d'une différentielle à l'origine

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $D_{x_0} f(0) \neq 0$.

FAUX. Si f est différentiable, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $D_x f$ est une application linéaire, donc $D_x f(0) = 0$.

Vrai/Faux 4 - Calcul

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\(h_1,h_2)\neq(0,0)}} \frac{\|f(h_1,-1+h_2)-f(0,-1)-h_1\|_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

alors f est différentiable en $(0,-1)$.

Vrai/Faux 4 - Calcul

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\(h_1,h_2)\neq(0,0)}} \frac{\|f(h_1,-1+h_2) - f(0,-1) - h_1\|_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

alors f est différentiable en $(0,-1)$.

VRAI. En effet, pour montrer que f est différentiable en x_0, il suffit de montrer qu'il existe une application linéaire L telle que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\h\neq 0}} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0,$$

ce qui est le cas ici avec $x_0 = (0,-1)$, puisque $x_0 + h = (h_1, -1+h_2)$, et

$$L : (h_1,h_2) \mapsto h_1$$

est linéaire, donc f est différentiable en $(0,-1)$ avec $D_{(0,-1)}f = L$.