Vrai ou Faux ? A propos du CM du 08/03

Analyse 4
22/03/2024

Vrai/Faux 1 - Fonction de classe C^1

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
Si $f \in C^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors f est continue sur Ω.

Vrai/Faux 1 - Fonction de classe C^1

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
Si $f \in C^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors f est continue sur Ω.

VRAI. Cela vient des implications suivantes

$$f \in C^2(\Omega) \Rightarrow f \in C^1(\Omega) \Rightarrow f \text{ différentiable sur } \Omega \Rightarrow f \text{ continue sur } \Omega$$

Vrai/Faux 2 - Fonction deux fois différentiable

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. On a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
& f \text{ et deux fois différentiable} \\
\iff & Df \text{ est différentiable} \\
\iff & \text{ les dérivées partielles de } f \text{ sont différentiables.}
\end{aligned}
$$

Vrai/Faux 2 - Fonction deux fois différentiable

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & f \text{ et deux fois différentiable} \\ \iff & Df \text{ est différentiable} \\ \iff & \text{ les dérivées partielles de } f \text{ sont différentiables.} \end{aligned}$$

VRAI. L'équivalence vient du fait que, comme f est différentiable, on peut écrire, $\forall x \in \Omega$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$,

$$D_x f(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i.$$

et calculer la différentielle de Df revient à calculer celles de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Vrai/Faux 3 - Différentielle seconde

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $x \mapsto D_x[Df(h)] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Vrai/Faux 3 - Différentielle seconde

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $x \mapsto D_x[Df(h)] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

VRAI. On sait que $Df : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad x \mapsto D_x f$.
Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(h) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto D_x f(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$$

et donc sa différentielle est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Vrai/Faux 3 - Différentielle seconde

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $x \mapsto D_x[Df(h)] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

VRAI. On sait que $Df : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad x \mapsto D_x f$.

Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(h) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto D_x f(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$$

et donc sa différentielle est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On a ainsi, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$D_x^2 f(h, k) = \underbrace{D_x[Df(h)]}_{\text{app. linéaire}}(k) = D_x \left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right](k) = \overbrace{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) h_i k_j}^{\text{linéaire par rapport aux } k_j}.$$

Vrai/Faux 3 - Différentielle seconde

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $x \mapsto D_x[Df(h)] \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

VRAI. On sait que $Df : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad x \mapsto D_x f$.

Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(h) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto D_x f(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}$$

et donc sa différentielle est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On a ainsi, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$D_x^2 f(h, k) = \underbrace{D_x[Df(h)]}_{\text{app. linéaire}}(k) = D_x \left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right](k) = \overbrace{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) h_i k_j}^{\text{linéaire par rapport aux } k_j}.$$

Exemple : $f(x, y) = x^3 + y^3$, alors $Df(h_1, h_2) : (x, y) \mapsto 3x^2 h_1 + 3y^2 h_2$ et donc $D_x[Df(h)] : (k_1, k_2) \mapsto 6x h_1 k_1 + 6y h_2 k_2$ qui est bien linéaire.

Vrai/Faux 4 - Symétrie de la différentielle seconde

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3y & 2x \end{pmatrix}, \quad H_g(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & y^2 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, $D^2_{(x,y)}f$ et $D^2_{(x,y)}g$ sont symétriques.

Vrai/Faux 4 - Symétrie de la différentielle seconde

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3y & 2x \end{pmatrix}, \quad H_g(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & y^2 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, $D^2_{(x,y)}f$ et $D^2_{(x,y)}g$ sont symétriques.

FAUX. En effet, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

- Pour f, la jacobienne nous donne $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x$ et on a donc
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 3 \neq 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$
- Quant à g, sa hessienne n'est pas symétrique ($5 \neq -3$), donc $D^2_{(x,y)}g$ ne l'est pas non plus.

Vrai/Faux 4 - Symétrie de la différentielle seconde

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3y & 2x \end{pmatrix}, \quad H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & y^2 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, $D^2_{(x,y)}f$ et $D^2_{(x,y)}g$ sont symétriques.

FAUX. En effet, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

- Pour f, la jacobienne nous donne $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x$ et on a donc
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3 \neq 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$
- Quant à g, sa hessienne n'est pas symétrique ($5 \neq -3$), donc $D^2_{(x,y)}g$ ne l'est pas non plus.

En fait, f et g ne sont pas deux fois différentiables !!
(cf. CM d'aujourd'hui)