Vrai ou Faux ? A propos du CM du 09/02 (et du TD de lundi)

Analyse 4
16/02/2024

Vrai/Faux 1 - Continuité et façons d'approcher un point

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que $f(0, ..., 0) = 1$. Alors si

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}, ..., \frac{1}{x}\right) = 1$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(e^{-x}, ..., e^{-x}\right) = 1$,

alors, quand $x \to +\infty$, $\left(\frac{1}{x}, ..., \frac{1}{x}\right)$ et $\left(e^{-x}, ..., e^{-x}\right)$ tendent vers $(0, ..., 0)$ et donc f est continue en $(0, ..., 0)$.

Vrai/Faux 1 - Continuité et façons d'approcher un point

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que $f(0, ..., 0) = 1$. Alors si

- $\lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}, ..., \frac{1}{x}\right) = 1$,
- $\lim_{x \to +\infty} f\left(e^{-x}, ..., e^{-x}\right) = 1$,

alors, quand $x \to +\infty$, $\left(\frac{1}{x}, ..., \frac{1}{x}\right)$ et $\left(e^{-x}, ..., e^{-x}\right)$ tendent vers $(0, ..., 0)$ et donc f est continue en $(0, ..., 0)$.

FAUX. Il faudrait que **pour tout chemin** $\boldsymbol{\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n}$ qui tend vers $(0, ..., 0)$ en l'infini, on ait

$$\lim_{x \to +\infty} f(\gamma(x)) = 1.$$

Vrai/Faux 2 - Application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire, alors, comme pour tout $x \neq 0$, $y = \frac{x}{\|x\|_2} \in S(0,1)$, on a

$$\sup_{y \in S(0,1)} \|f(y)\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \right\|_2 \quad \text{est fini.}$$

Vrai/Faux 2 - Application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire, alors, comme pour tout $x \neq 0$, $y = \frac{x}{\|x\|_2} \in S(0,1)$, on a

$$\sup_{y \in S(0,1)} \|f(y)\|_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}} \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \right\|_2 \quad \text{est fini.}$$

Vrai. On a démontré que pour toute application linéaire f, il existe $k > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(x)\|_2 \leq k\|x\|_2,$$

ce qui veut dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, on a, par linéarité de la norme et de f,

$$0 \leq \frac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_2} = \left\| \frac{f(x)}{\|x\|_2} \right\|_2 = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \right\|_2 \leq k,$$

et donc que $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0,0)\}} \frac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_2}$ existe et est fini.

Vrai/Faux 3 - Compacité et fonction continue

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application continue et $K \subset \mathbb{R}^p$ un compact. Alors $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Vrai/Faux 3 - Compacité et fonction continue

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application continue et $K \subset \mathbb{R}^p$ un compact. Alors $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

FAUX. Pour $n = p = 1$, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin(x).$$

$[-1, 1]$ est compact, f est continue et $f^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$ n'est pas compact. De même avec avec toute fonction bornée sur un ouvert de $\mathbb{R}$.

On va démontrer aujourd'hui que $f(K)$ est toujours compact quand K est compact et f est continue (Weierstrass).

Vrai/Faux 4 - Limite et coordonnées polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.
Alors en passant en coordonnées polaires $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times [0,2\pi[$, on a

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}.$$

- Si $\cos\theta \neq 0$, alors $f(r\cos\theta, r\sin\theta) \to \dfrac{0}{\cos^2(\theta)} = 0$ quand $r \to 0$.
- Si $\cos\theta = 0$, alors $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(0, r\sin\theta) = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Vrai/Faux 4 - Limite et coordonnées polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Alors en passant en coordonnées polaires $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times[0,2\pi[$, on a

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}.$$

- Si $\cos\theta \neq 0$, alors $f(r\cos\theta, r\sin\theta) \to \dfrac{0}{\cos^2(\theta)} = 0$ quand $r \to 0$.
- Si $\cos\theta = 0$, alors $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(0, r\sin\theta) = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

FAUX. Il faut majorer $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)|$ par une quantité INDEPENDANTE de θ et tendant vers 0. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\forall x \neq 0, \quad f(x^2,x) = \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}, \quad f(0,x) = 0,$$

et $(x^2,x) \to (0,0)$ et $(0,x) \to (0,0)$, donc f n'a pas de limite en $(0,0)$.