Vrai ou Faux ? A propos du CM du 05/04

Analyse 4
12/04/2024

Vrai/Faux 1 - Point selle

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable au point $(1,1,1)$ tel que $\nabla_{(1,1,1)} f = 0$ et

$$H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

alors f admet au point $(1,1,1)$ un point selle.

Vrai/Faux 1 - Point selle

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable au point $(1,1,1)$ tel que $\nabla_{(1,1,1)} f = 0$ et

$$H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

alors f admet au point $(1,1,1)$ un point selle.

VRAI. Les valeurs propres de $H_f(1,1,1)$ sont $\{-2,0,1\}$. 1 et -2 sont de signes opposés, donc f admet au point $(1,1,1)$ un point selle.

Dès que <u>x_0 est un point critique de f</u> et que
<u>deux valeurs propres de $H_f(x_0)$ sont de signes opposés</u>,
f admet un point selle en x_0.

Vrai/Faux 2 - En dimension 2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $(0,2) \in \Omega$ tel que

$$H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

alors $H_f(0,2)$ est définie positive et donc f admet en $(0,2)$ un min local.

Vrai/Faux 2 - En dimension 2

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $(0,2) \in \Omega$ tel que

$$H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

alors $H_f(0,2)$ est définie positive et donc f admet en $(0,2)$ un min local.

FAUX. Il faut que $(0,2)$ soit un point critique !

Vrai/Faux 3 - Déterminant de la hessienne

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, n pair, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $x_0 \in \Omega$ tel que

$$\nabla_{x_0} f = 0 \quad \text{et} \quad \det(H_f(x_0)) < 0,$$

alors f admet un point selle en x_0.

Vrai/Faux 3 - Déterminant de la hessienne

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, n pair, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $x_0 \in \Omega$ tel que

$$\nabla_{x_0} f = 0 \quad \text{et} \quad \det(H_f(x_0)) < 0,$$

alors f admet un point selle en x_0.

VRAI. En notant $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ les valeurs propres de $H_f(x_0)$, on sait que

$$\det(H_f(x_0)) = \lambda_1 \times ... \times \lambda_n.$$

Ainsi, $\det(H_f(x_0)) < 0$ implique, comme n est pair, qu'au moins une des valeurs propres est strictement négative, donc f admet un point selle en x_0.

Vrai/Faux 4 - Déterminant et trace de la hessienne ($n = 2$)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $(1, -1) \in \Omega$ avec $\nabla_{(1,-1)} f = 0$ et tel que

$$\det(H_f(1, -1)) > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(H_f(1, -1)) > 0,$$

alors f admet un minimum local en $(1, -1)$.

Vrai/Faux 4 - Déterminant et trace de la hessienne ($n = 2$)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $(1, -1) \in \Omega$ avec $\nabla_{(1,-1)} f = 0$ et tel que

$$\det(H_f(1, -1)) > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(H_f(1, -1)) > 0,$$

alors f admet un minimum local en $(1, -1)$.

VRAI. En dimension $n = 2$, en notant $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ les valeurs propres de $H_f(1, -1)$, on a

$$\boldsymbol{\det(H_f(1, -1)) = \lambda_1 \times \lambda_2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\mathrm{Tr}(H_f(1, -1)) = \lambda_1 + \lambda_2.}$$

- Si $\det(H_f(1, -1)) = \lambda_1 \times \lambda_2$, alors λ_1 et λ_2 sont non-nulles et ont le même signe.
- De plus, si $\mathrm{Tr}(H_f(1, -1)) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$, alors cela implique que, nécessairement $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

Ainsi, $H_f(1, -1)$ est définie positive et comme $(1, -1)$ est un point critique, f admet en $(1, -1)$ un minimum local.

Fin des VRAI-FAUX !

Vous avez maintenant 39 questions pour réviser ou vous entraîner !